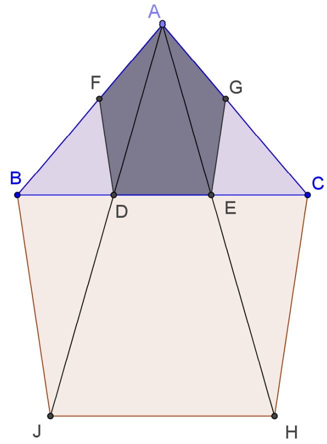
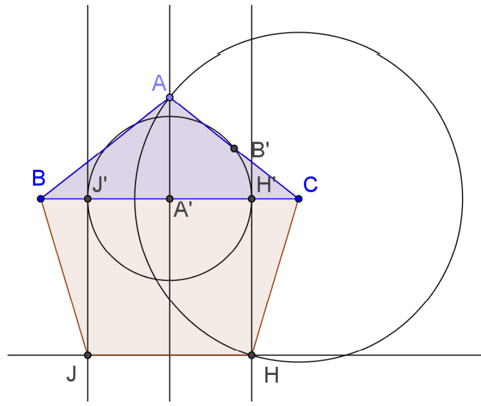
Au fil des problèmes 542-4

On n'étudiera dans cette partie que le cas où AFDEG est non croisé.



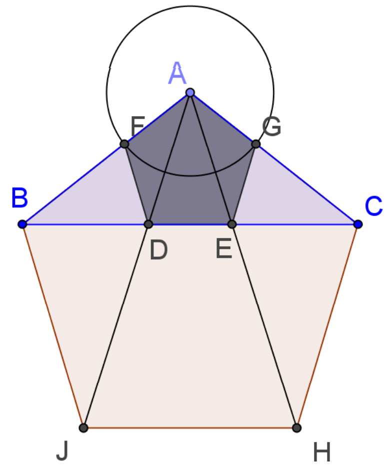
Analyse :

1. La condition $AF = AG$ indique que F et G sont symétriques par rapport à la médiatrice de [BC]. La condition $AF = FD$ donne alors deux positions possibles pour D, idem pour E, soient 4 segments [DE]. *A priori*, parmi ces 4 segments, 2 correspondent à une symétrie du pentagone par rapport à la médiatrice de [BC], les deux autres non : on va s'intéresser au premier cas, l'autre sera abordé lors de la discussion.
2. ABC isocèle de base [BC] étant donné, l'image du pentagone $ABJHC$ dont les côtés sont égaux par l'homothétie de centre A transformant D en J va être le pentagone $AFDEG$ qui répond à la question. Le problème est ainsi ramené à la construction de $ABJHC$.



Construction de $ABJHC$ (cas symétrique) :
On construit A' et B' milieux respectifs de [BC] et [AC], puis le cercle de centre A' passant par B', qui coupe la droite (BC) en J' et H'.
On construit le cercle (C) de centre C passant par A, puis la perpendiculaire (d) à (BC) passant par H' : elle coupe le cercle (C) dans le demi-plan de frontière [BC] ne contenant par A au point H.
On construit enfin J symétrique de H par rapport à la médiatrice de [BC].

Synthèse : $AB = AC = BJ = CH$ est immédiat.
Par ailleurs, $A'H' = A'B' = ½\,AB$ par le théorème des milieux, donc $J'H' = AB$, d'où $JH = AB$. Le pentagone $ABJHC$ est donc bien un pentagone dont les côtés sont égaux.



Construction de $AFDEG$ (cas symétrique) :
On construit les points D et E intersections respectives des segments [AJ] et [AH] avec la droite (BC).
On construit le cercle de centre A et de rayon DE qui coupe les segments [AB] et [AC] respectivement en F et G.

Synthèse : notons h l'homothétie de centre A transformant J en D.
On a $h(H) = E$ par alignement et parallélisme.
Par ailleurs, h transforme le pentagone à côtés égaux $ABJHC$ en un pentagone à côtés égaux, donc $h(B)$ est l'intersection de la droite (AB) et du cercle de centre A et de rayon DE, donc $h(B) = F$. De même, $h(C) = G$, donc $AFDEG$ répond à la question.

Discussion (cas symétrique) : le problème indique que D et E doivent appartenir à la base [BC] : dans le cas contraire, on obtient un pentagone non convexe, dont le cas limite se situe quand $D = B$, *i.e* quand A, B et F sont alignés. On a alors la figure 2 ci-contre, avec $BC = ½\,AB$:
cela correspond à un demi-angle au sommet α tel que
$\sin\alpha = \frac{1}{4}$, soit un angle au sommet d'environ 29°.

Cette construction est impossible pour $\alpha < \sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$.

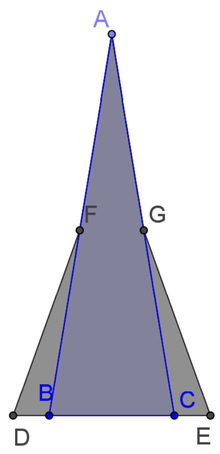


fig 1

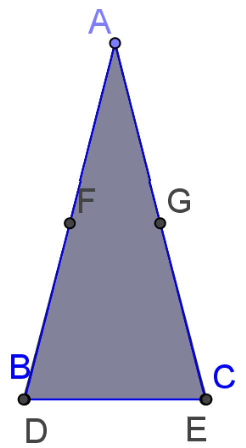
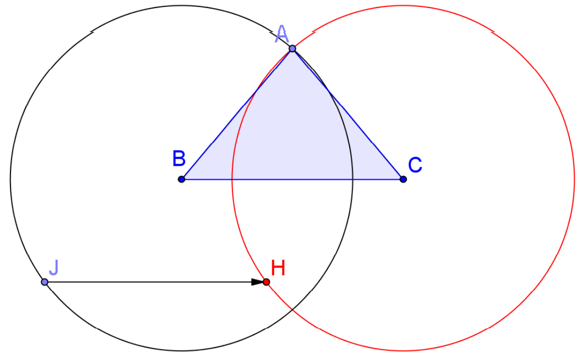
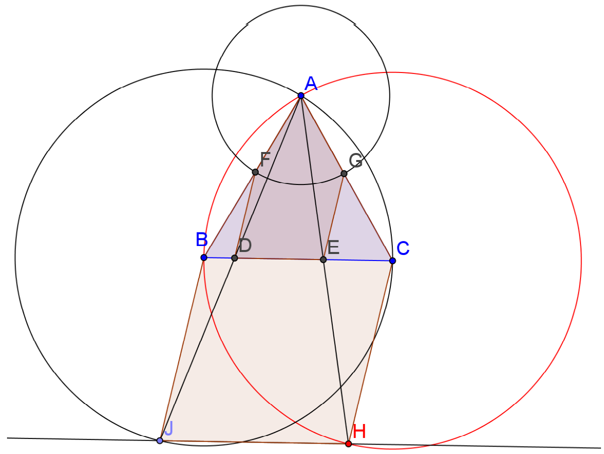


fig 2

Cas non symétrique : *a priori*, on peut se demander s'il existe des polygones *ABJHC* non symétriques par rapport à la médiatrice de [*BC*] répondant à la question 2 de l'analyse : il s'agit donc de construire les points *J* et *H* tels que *JH* = *AB*, avec *J* appartenant au cercle (*C*) de centre *B* passant par *A*, *H* appartenant au cercle (*C'*) de centre *C* passant par *A* et $\overrightarrow{JH} = k\overrightarrow{BC}$, avec $k > 0$. Or (*C'*) est l'image de (*C*) par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, donc $\overrightarrow{JH} = \overrightarrow{BC}$. On en conclut que ce type de construction n'est possible que lorsque *AB* = *BC*, *i.e* lorsque le triangle *ABC* est équilatéral.
On constate sans peine que, lorsque le triangle est équilatéral, la construction du cas symétrique correspond à *BJHC* est un carré.
L'infinité de cas non symétriques correspond à *BJHC* losange non carré, avec positions limites pour *A*, *B*, *J* alignés d'une part, *A*, *C*, *H* alignés d'autre part : n'importe point *J* choisi sur (*C*) remplissant ces conditions permet de construire de manière immédiate un pentagone non symétrique répondant à la question.





Etude rapide du cas où AFDEG est croisé.

L'étude du cas symétrique est analogue à celui de la première partie, en intervertissant *J'* et *H'* : la seule différence est qu'il existe un cas limite supérieur pour *ABC* équilatéral : pour $\alpha > 30°$, le cercle (*C*) et la droite (*d*) n'ont pas d'intersection, puisque *CH'* > *CA* par construction. La construction n'est donc possible que lorsque le demi-angle au sommet α vérifie $\sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6}$.
Le cas non symétrique n'a pas de solution en raisonnant par l'absurde : d'après le raisonnement du haut de page, $\overrightarrow{JH} = k\overrightarrow{BC}$, avec $k < 0$ conduit nécessairement à obtenir un pentagone symétrique.