Exercice 542-2
Inégalité.

Patrick David (david@ensea.fr), Julien Sautier (sautier.julien@orange.fr)

janvier 2022

Énoncé de l'exercice.

Soient trois réels strictement positifs x, y, z, montrer que l'inégalité :

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^2 \geq (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

est toujours vraie.

Solution.

En posant

$$h(x,y,z)=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^2-(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Il faut montrer que $h(x,y,z) \geq 0$.

Comme h est invariant par la permutation circulaire $x \to y$, $y \to z$,$z \to x$, on peut supposer sans perte de généralité que $z \geq x$ et $z \geq y$. Dans ce cas,en posant $x = uz$ et $y = vz$ avec u, v dans $[0, 1]$, on a après simplification et classement des expressions :

$$h(uz,vz,z)=\left(\frac{u}{v}+v+\frac{1}{u}\right)^2-(u+v+1)\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+1\right)=$$

$$\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u}+u+v^2-v+\frac{1}{v}+\frac{u^2}{v^2}-\frac{u}{v}+\frac{v}{u}-3=g(u,v)$$

L'expression ne dépend pas de z. On se ramène donc à une recherche de minimum à 2 variables en pouvant se limiter au carré $]0,1]^2$.

Posons $f(t)=t^2-t+\frac{1}{t}$. On a $f'(t)=2t-1-\frac{1}{t^2}=\frac{(t-1)(2t^2+t+1)}{t^2}$ et $f''(t)=2+\frac{2}{t^3}$.

On en déduit que sur $]0,\infty[$, et donc aussi sur $]0,1]$, f admet un minimum global en 1, avec $f(1)=1$.

Or $g(u,v)=f\left(\frac{1}{u}\right)+f(v)+f\left(\frac{u}{v}\right)-3$. Donc $g(u,v)$ admet un minimum absolu pour $u=v=1$ dans $]0,1]^2$ avec $g(1,1)=0$. Cela implique $h(z,z,z)=0$ et sinon $h(x,y,z)>0$.

En conclusion pour x, y, z strictement positifs,

$$\text{Si } x=y=z, \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^2=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=9.$$

$$\text{Sinon } \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^2>(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Généralisation.

On peut se poser la même question pour un nombre n de variables $x_i \in \mathbb{R}_+^*$, avec $n \geq 2$, et se demander si l'inégalité :

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{x_{i+1}} + \frac{x_n}{x_1}\right)^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)$$

est toujours vraie.

Cela revient à étudier le signe pour les $x_i \in \mathbb{R}_+^*$ de

$$h[x_1, \cdots, x_n] = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{x_{i+1}} + \frac{x_n}{x_1}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)$$

Les calculs ont été fait avec *Mathematica* qui se prête bien aux manipulations de liste en utilisant **Apply** (abréviation @@) et **RotateLeft**. La fonction h précédente s'écrit en *Mathematica*

$$h[\text{li\_}] := \left(\text{Plus@@}\frac{\text{li}}{\text{RotateLeft[li]}}\right)^2 - (\text{Plus@@li})\left(\text{Plus@@}\frac{1}{\text{li}}\right)$$

Comme $h[x_1, \cdots, x_n]$ est invariant par permutation circulaire, on peut aussi supposer que $x_n = \max(x_1, \cdots, x_n)$ et en posant $x_i = u_i x_n$ et en observant que les x_n s'éliminent, cela revient à étudier le signe de :

$$g[u_1, \cdots, u_{n-1}] = \left(\sum_{i=1}^{n-2} \frac{u_i}{u_{i+1}} + u_{n-1} + \frac{1}{u_1}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n-1} u_i + 1\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{u_i} + 1\right)$$

pour $u_i \in]0, 1]$. On a une variable de moins, mais on perd la symétrie.

1. Cas $n = 2$

Il faut étudier le signe de $h(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right)^2 - (x_1 + x_2)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)$ c'est à dire celui de $g(u) = \left(u + \frac{1}{u}\right)^2 - (u + 1)\left(\frac{1}{u} + 1\right) = \frac{u^4 - u^3 - u + 1}{u^2}$ pour $u \in]0, 1]$.

Une étude de la fonction polynôme définie par $f(u) = u^4 - u^3 - u + 1$ sur $[0, 1]$ montre qu'elle est strictement décroissante sur $[0, 1]$ avec $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$.

Donc l'inégalité est vraie pour $n = 2$, elle est stricte pour $x_1 \neq x_2$ et est une égalité pour $x_1 = x_2$

2. Cas $n = 3$

Cas initialement posé. On a vu que l'inégalité est toujours vraie.

3. Cas $n \geq 4$

Les calculs de dérivées partielles ou de factorisation donnent des systèmes d'équations difficiles à résoudre à la main. Mais l'utilisation de la recherche de minimum d'une fonction avec *Mathematica* permet de trouver de nombreux contre-exemples avec des $x_i \in \mathbb{N}_+^*$. Les résultats les plus simples s'obtiennent avec des $\frac{x_i}{x_{i+1}}$ eux-mêmes entiers. On trouve finalement la famille de contre-exemples : $c_k = (1000, 100, 10, 1, \cdots, 1)$ dans lequel il y a k valeurs 1 après le 10. Pour un c_k avec $k \geq 1$ le nombre d'éléments est $n = k + 3$.

On a $h(c_k) = \left(30 + k - 1 + \frac{1}{1000}\right)^2 - (1110 + k)\left(\frac{111}{1000} + k\right) = -\frac{1052109}{1000}k + \frac{717848001}{1000000}$ qui est une suite arithmétique décroissante.

Comme $h(1000, 100, 10, 1) = h(c_1) = -\frac{334260999}{1000000} < 0$, tous les $h(c_k)$ sont négatifs.

En conclusion, l'inégalité est toujours vraie pour $n = 2$ ou $n = 3$ et ne l'est pas pour les valeurs suivantes.