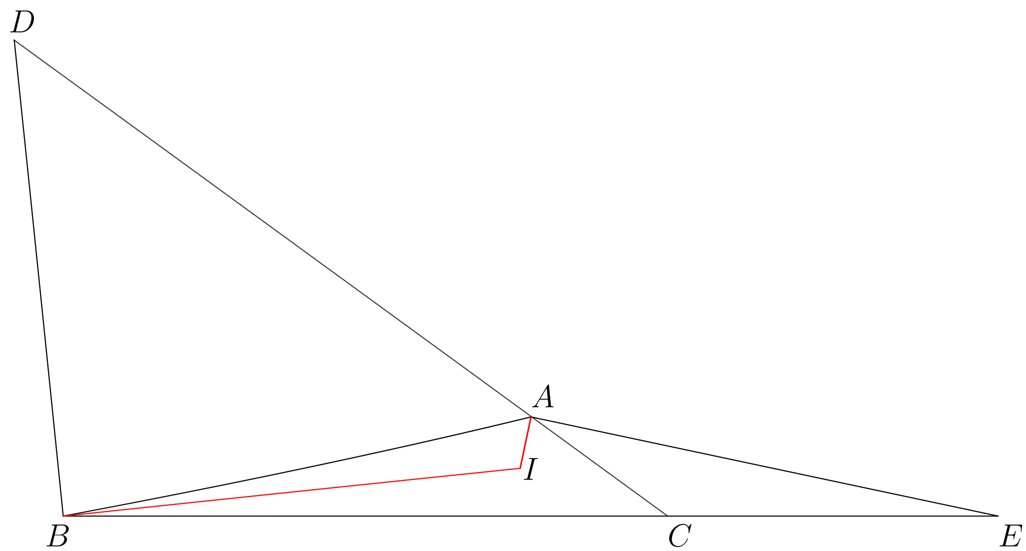
542-1 Le triangle de Bottema.



On désigne par I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

Puisque $AB = AE$, le triangle BAE est isocèle ; donc $\widehat{AEB} = \widehat{ABE} = \widehat{B}$.
Puisque AE est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{A}$, on a

$$\widehat{CAE} = \widehat{IAE} - \widehat{IAC} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A}}{2}\cdot$$

La somme des angles du triangle AEC est égale à π, et donc

$$\widehat{B} + \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A}}{2} + (\widehat{A} + \widehat{B}) = \pi \iff 2\widehat{B} + \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot \tag{1}$$

Puisque $BA = BD$, le triangle ABD est isocèle ; donc $\widehat{BDA} = \widehat{BAD} = \pi - \widehat{A}$.

Puisque BD est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{B}$, on a $\widehat{DBA} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\widehat{B}}{2}\cdot$
La somme des angles du triangle DBA est égale à π, et donc

$$2(\pi - \widehat{A}) + \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{B}}{2} = \pi \iff 2\widehat{A} + \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{3\pi}{2}\cdot \tag{2}$$

Donc les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont déterminés par le système des relations (1), (2) :

$$\begin{cases} \widehat{A} + 4\widehat{B} = \pi \\ 4\widehat{A} + \widehat{B} = 3\pi \end{cases} \iff \begin{cases} 15\widehat{A} = -\pi + 12\pi = 11\pi \\ 15\widehat{B} = 4\pi - 3\pi = \pi. \end{cases}$$

On a donc obtenu

$$\widehat{A} = \frac{11\pi}{15} = 132°, \quad \widehat{B} = \frac{\pi}{15} = 12°.$$

Marie-Nicole Gras