542-2 Une inégalité genre olympiades.

Nous allons utiliser 2 inégalités bien connues des candidats aux olympiades :

- Pour tout $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$ on a
$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc. \tag{1}$$

Cette inégalité, qui exprime que la moyenne arithmétique est supérieure ou égale à la moyenne géométrique, résulte de l'identité :
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}\Big(a+b+c\Big)\Big((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\Big).$$

- Pour tout $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$ on a
$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2. \tag{2}$$

Cette inégalité résulte de l'identité :
$$\begin{aligned} 3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2 &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \\ &= (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2. \end{aligned}$$

On développe, puis on réduit au même dénominateur l'inégalité proposée, et on obtient
$$\begin{aligned} &\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)^2 \geq (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} + 2\left(\frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}\right) \geq 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}\right) \\ \Longleftrightarrow\ & x^4z^2 + y^4x^2 + z^4y^2 + 2xyz(x^2y + y^2z + z^2x) \\ &\qquad \geq 3x^2y^2z^2 + xyz(x^2z + y^2x + z^2y) + xyz(x^2y + y^2z + z^2x) \\ \Longleftrightarrow\ & \Big[x^4z^2 + y^4x^2 + z^4y^2 - xyz(x^2z + y^2x + z^2y)\Big] \\ &\qquad + xyz\Big[x^2y + y^2z + z^2x - 3xyz\Big] \geq 0. \end{aligned}$$

D'après (1), qui s'écrit aussi $u + v + w \geq 3\sqrt[3]{uvw}$ pour tout $u > 0, v > 0, w > 0$, on a
$$x^2y + y^2z + z^2x \geq 3xyz. \tag{3}$$

Il suffit alors de montrer que
$$x^4z^2 + y^4x^2 + z^4y^2 \geq xyz(x^2z + y^2x + z^2y). \tag{4}$$

D'après (2), puis (3), on a
$$\begin{aligned} 3(x^4z^2 + y^4x^2 + z^4y^2) &\geq (x^2z + y^2x + z^2y)^2 = (x^2z + y^2x + z^2y)(x^2z + y^2x + z^2y) \\ &\geq (3xyz)(x^2z + y^2x + z^2y). \end{aligned}$$

On en déduit (4) et on obtient le résultat demandé.

Marie-Nicole Gras