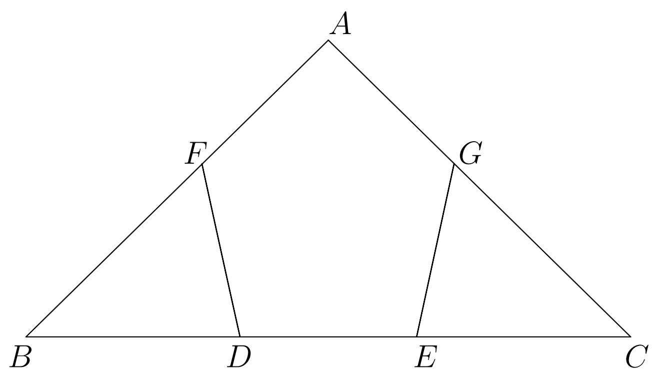
542-4 Tiré d'un vieux numéro du journal de mathématiques élémentaires.

On désigne par $\widehat{B}$ la valeur des angles égaux $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$; ces angles sont aigus et $\cos\widehat{B} > 0$. On pose $a = BC$, $b = AB = AC$; on a un triangle et donc $b > \dfrac{a}{2}\cdot$

On désigne par $\mathcal{P}$ le pentagone inscrit dans le triangle ABC et dont tous les côtés sont égaux. On va montrer que

- Si $b \geq 2a$, il n'existe pas de pentagone $\mathcal{P}$.
- Si $\dfrac{a}{2} < b < 2a$, il existe un pentagone $\mathcal{P}$ (unique, si $b \neq a$).
- Si $b = a$ (triangle équilatéral), il existe une infinité de pentagones $\mathcal{P}$.



On désigne par x la longueur du côté du pentagone $\mathcal{P}$. On place les points D et E sur $[BC]$, F sur $[AB]$ et G sur $[AC]$, de telle sorte que $DE = AF = AG = x$; il est donc nécessaire que $0 < x < a$ et $0 < x < b$. On va exprimer que $DF = EG = x$.

En appliquant la formule d'Al-Kashi respectivement dans les triangles DBF et ECG, on obtient

$$DF^2 = (b-x)^2 + BD^2 - 2(b-x)BD\cos\widehat{B},$$
$$EG^2 = (b-x)^2 + CE^2 - 2(b-x)CE\cos\widehat{B},$$

et on en déduit

$$\begin{aligned} DF = EG &\iff BD^2 - CE^2 - 2(b-x)(BD-CE)\cos\widehat{B} = 0 \\ &\iff (BD-CE)\Big[BD + CE - 2(b-x)\cos\widehat{B}\Big] = 0. \end{aligned}$$

Il y a donc deux possibilités.

I) $BD = CE$.

Alors $DF = EG$ et on exprime que $DF = x$; on a $BD = CE = \dfrac{a-x}{2}$, $\cos\widehat{B} = \dfrac{a}{2b}$ et on en déduit

$$\begin{aligned} DF^2 &= (b-x)^2 + \left(\frac{a-x}{2}\right)^2 - 2\Big(b-x\Big)\frac{a-x}{2}\,\frac{a}{2b} \\ &= x^2 - 2bx + b^2 + \frac{a^2 - 2ax + x^2}{4} - \frac{2a(x^2 - ax - bx + ab)}{4b} \\ &= x^2 + \frac{x^2(b-2a) + x(-8b^2 + 2a^2) + 4b^3 - a^2 b}{4b}, \end{aligned}$$

et donc $DF = x$ si et seulement si x est racine du polynôme

$$Q = (b-2a)x^2 - 2(4b^2 - a^2)x + b(4b^2 - a^2).$$

On a donc montré qu'il existe un pentagone $\mathcal{P}$ inscrit dans un triangle si et seulement si le polynôme Q admet une racine réelle x telle que $0 < x < a$ et $0 < x < b$. En effet, on sait alors placer les points F et G respectivement sur $[AB]$ et $[AC]$, ainsi que les points D et E sur $[BC]$ puisque $BD = CE = \dfrac{a-x}{2}$.

On calcule donc

$$\begin{aligned}
Q(0) &= b(2b-a)(2b+a),\\
Q(a) &= (b-2a)a^2 + (4b^2-a^2)(b-2a) = 4b^2(b-2a),\\
Q(b) &= (b-2a)b^2 - b(4b^2-a^2),\\
\Delta &= 4(4b^2-a^2)^2 - 4(4b^2-a^2)(b^2-2ab) = 4(4b^2-a^2)(a+b)(3b-a).
\end{aligned}$$

Puisque ABC est un triangle, on a $2b - a > 0$; il en résulte $\Delta > 0$ et Q admet deux racines réelles, x_1 et x_2, $x_1 \leq x_2$. On discute de leur ordre de grandeur, selon les valeurs de $b - 2a$.

Cas **(i)** : $b - 2a > 0$.
Dans ce cas, on a $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $Q(0) > 0$ et $Q(a) > 0$. Il en résulte que si $x_1 \in]0, a[$, alors $x_2 \in]0, a[$ et $\dfrac{x_1 + x_2}{2} \in]0, a[$, ce qui est impossible car

$$\frac{x_1+x_2}{2} - a = \frac{4b^2-a^2}{b-2a} - a = \frac{4b^2+a^2-ab}{b-2a} = \frac{2b(2b-a)+a^2+ab}{b-2a} > 0.$$

Donc il n'existe pas de pentagone $\mathcal{P}$.

Cas **(ii)** : $b = 2a$.
Alors P est du premier degré et admet un seule racine $x = a$; les points B et D d'une part, C et G d'autre part, sont confondus, et cette solution ne convient pas.

Cas **(iii)** : $b - 2a < 0$.
Dans ce cas, on a $x_1 x_2 < 0$ et Q admet une seule racine positive, $x = x_2$. On a $Q(0) > 0$, $Q(a) < 0$ et $Q(b) < 0$; il en résulte que cette racine réelle x_2 vérifie $0 < x_2 < a$ et $0 < x_2 < b$. Donc il existe un pentagone $\mathcal{P}$ de côté x_2. Cette valeur de x_2 est connue, puique c'est la racine positive de l'équation du second degré $Q = 0$.

On remarque que le milieu de BC est aussi le milieu de DE, et le pentagone $\mathcal{P}$ est symétrique par rapport à l'axe de symétrie du triangle BAC.

II) $BD + CE - 2(b-x)\cos\widehat{B} = 0$.

On note que $BD + CE = a - x = 2b\cos\widehat{B} - x$, et donc

$$BD + CE - 2(b-x)\cos\widehat{B} = x(1 - 2\cos\widehat{B}) = 0 \iff \cos\widehat{B} = \frac{1}{2}.$$

Donc le triangle ABC est équilatéral et $DF = EG$ quelque soit la place du segment $[DE]$ sur le côté $[BC]$. On pose $u = BD$. On a alors, pour tout $u, x, 0 < u, x < a$,

$$DF^2 = EG^2 = (a-x)^2 + u^2 - (a-x)u.$$

La longueur u étant donnée, on exprime que $DF = x$, et on obtient

$$\begin{aligned} DF^2 = x^2 &\iff a^2 - 2ax + u^2 - au + ux = 0 \\ &\iff x(2a - u) = a^2 + u^2 - au. \end{aligned}$$

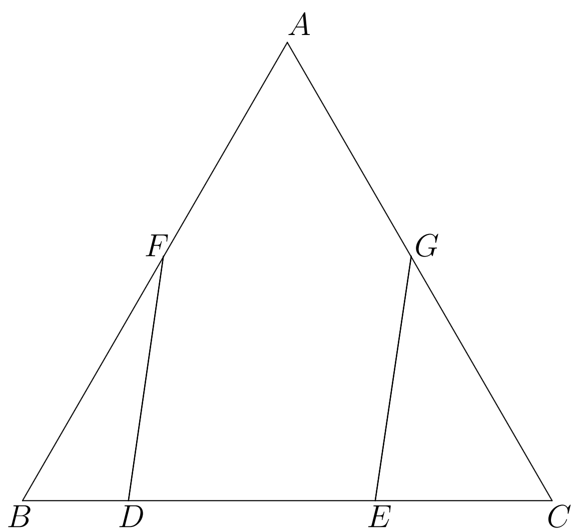
Puisque $u \neq 2a$, on obtient que $DF = x$ pour une seule valeur x_0 de x,

$$x_0 = \frac{u^2 - au + a^2}{2a - u}\cdot$$

Cette valeur x_0 permet de construire un solution si $BE < BC$, c'est à dire $u + x_0 < a$. On calcule

$$a - u - x_0 = \frac{(a-u)(2a-u) - (u^2 - au + a^2)}{2a - u} = \frac{a(a-2u)}{2a-u}\cdot$$

Puisque $2a - u > 0$, on obtient que si $0 < u < \dfrac{a}{2}$, alors $u + x_0 < a$, et on peut construire un pentagone $\mathcal{P}$ pour chaque u, ce qui donne une infinité de solutions.



On remarque que puisque $FG = x_0$, le quadrilatère $DFGE$ est un losange. Il y a la solution obtenue dans le cas I (iii) et alors $DFGE$ est un carré. Dans les autres cas, la figure n'est pas symétrique par rapport à l'axe de symétrie du triangle BAC.

Marie-Nicole Gras