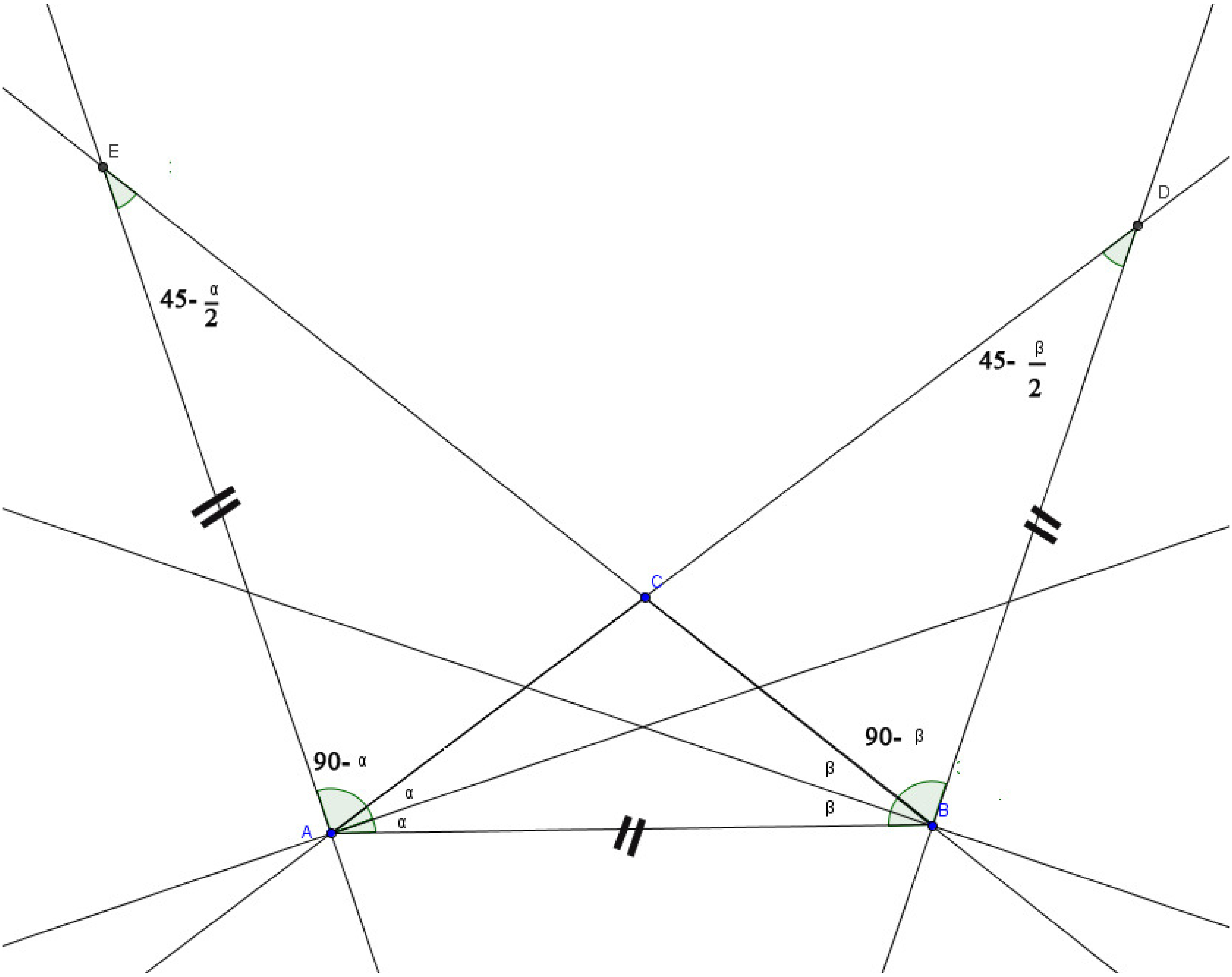
Ex 542-1



Pour les collégiens on va écrire les angles en degré

Dans le dessin à main levée du triangle ABC, on note $B\hat{A}C = 2\alpha$ et $A\hat{B}C = 2\beta$.

Les bissectrices intérieures et extérieures étant perpendiculaires, il vient $B\hat{A}E = 90+\alpha$ et $A\hat{B}D = 90+\beta$.

Les triangles ABE et ABD étant isocèle en A et B respectivement, on a $A\hat{E}B = 45-\dfrac{\alpha}{2}$ et $A\hat{D}B = 45-\dfrac{\beta}{2}$ et le système $\begin{cases} 45-\dfrac{\alpha}{2} = 2\beta \\ 45-\dfrac{\beta}{2} = 2\alpha \end{cases}$ soit $\begin{cases} 90-\alpha = 4\beta \\ 90-\beta = 4\alpha \end{cases}$ qui n'a évidemment qu'une solution $\alpha = \beta = 18$ et ainsi $B\hat{A}C = 36$ et $A\hat{B}C = 36$

Pour éviter une résolution de système en collège, on peut supposer pour des raisons évidentes de symétrie du problème que $\alpha = \beta$. Alors c'est encore plus simple puisque l'on a $45-\dfrac{\alpha}{2} = 2\alpha$ soit $90-\alpha = 4\alpha$ et $90 = 5\alpha$ donc $\alpha = 18$.

Pour les lycéens qui aime la géométrie analytique, la trigonométrie et la résolution d'équation bicarrée, on peut faire ceci:

Dans un repère orthonormé on place les points $A(0,0)$, $B(1,0)$ et $C\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}tan(2\alpha)\right)$.

L'équation de la droite (AC) est donc $y = tan(2\alpha)x$

L'équation de la bissectrice intérieure à A est $y = tan(\alpha)x$ et la bissectrice extérieure qui est perpendiculaire $y = -\dfrac{1}{tan(\alpha)}x$

L'équation de la droite (BC) est donc $y = -tan(2\alpha)(x-1)$
L'équation de la bissectrice intérieure à B est $y = -tan(\alpha)(x-1)$ et la bissectrice extérieure qui est perpendiculaire $y = \dfrac{1}{tan(\alpha)}(x-1)$
Cherchons les coordonnées de E intersection de (BC) et de la bissectrice extérieure à A.

$$-tan(2\alpha)(x-1) = -\frac{1}{tan(\alpha)}x$$

$$\left(\frac{1}{tan(\alpha)} - tan(2\alpha)\right)x = -tan(2\alpha)$$

$$(1 - tan(2\alpha)tan(\alpha))x = -tan(2\alpha)tan(\alpha)$$

$$x = \frac{-tan(2\alpha)tan(\alpha)}{1 - tan(2\alpha)tan(\alpha)}$$

$$y = -\frac{1}{tan(\alpha)} \times \frac{-tan(2\alpha)tan(\alpha)}{1 - tan(2\alpha)tan(\alpha)} = \frac{tan(2\alpha)}{1 - tan(2\alpha)tan(\alpha)}$$

Comme AE=1

$$\left(\frac{-tan(2\alpha)tan(\alpha)}{1 - tan(2\alpha)tan(\alpha)}\right)^2 + \left(\frac{tan(2\alpha)}{1 - tan(2\alpha)tan(\alpha)}\right)^2 = \frac{tan^2(2\alpha)tan^2(\alpha) + tan^2(2\alpha)}{(1 - tan(2\alpha)tan(\alpha))^2} = 1$$

soit $tan^2(2\alpha)tan^2(\alpha) + tan^2(2\alpha) = (1 - tan(2\alpha)tan(\alpha))^2$

$$tan^2(2\alpha)tan^2(\alpha) + tan^2(2\alpha) = 1 - 2\,tan(2\alpha)tan(\alpha) + tan^2(2\alpha)tan^2(\alpha)$$

$tan^2(2\alpha) + 2\,tan(2\alpha)tan(\alpha) - 1 = 0$ or $tan^2(2\alpha) = \dfrac{2\,tan(\alpha)}{1 - tan^2(\alpha)}$ donc successivement

$$\left(\frac{2\,tan(\alpha)}{1 - tan^2(\alpha)}\right)^2 + 2\frac{2\,tan(\alpha)}{1 - tan^2(\alpha)}tan(\alpha) - 1 = 0$$

$$\frac{4\,tan^2(\alpha)}{(1 - tan^2(\alpha))^2} + \frac{4\,tan^2(\alpha)(1 - tan^2(\alpha))}{(1 - tan^2(\alpha))^2} - \frac{(1 - tan^2(\alpha))^2}{(1 - tan^2(\alpha))^2} = 0$$

$$4\,tan^2(\alpha) + 4\,tan^2(\alpha) - 4\,tan^4(\alpha) - (1 - tan^2(\alpha))^2 = 0$$

$$8\,tan^2(\alpha) - 4\,tan^4(\alpha) - 1 + 2\,tan^2(\alpha) - tan^4(\alpha) = 0$$

$$-5\,tan^4(\alpha) + 10\,tan^2(\alpha) - 1 = 0$$

$$5\,tan^4(\alpha) - 10\,tan^2(\alpha) + 1 = 0$$

On pose $x = tan^2(\alpha)$ et on résout $5x^2 - 10x + 1 = 0$

$\Delta = 10^2 - 4 \times 5 \times 1 = 80$

$x_1 = \dfrac{10 - \sqrt{80}}{10} = \dfrac{5 - 2\sqrt{5}}{5}$ et $tan(\alpha) = \sqrt{\dfrac{5 - 2\sqrt{5}}{5}}$ est la seule solution possible

En posant $\theta = 18°$ on a $2\theta + 3\theta = 90°$ et donc $2\theta = 90° - 3\theta$
Il vient $sin(2\theta) = sin(90° - 3\theta)$ soit $2\,sin\,\theta\,cos\,\theta = cos(3\theta)$

$$2\,sin\,\theta\,cos\,\theta = 4\,cos^3\theta - 3\,cos\,\theta$$

$$2\,sin\,\theta = 4\,cos^2\theta - 3$$

$$2\,sin\,\theta = 4(1 - sin^2\theta) - 3$$

$$4\,sin^2\theta + 2\,sin\,\theta - 1 = 0$$

En posant $x = sin\,\theta$ on a $4x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 4 \times (-1) = 20$

on a $sin\,\theta = \frac{-2+\sqrt{20}}{8} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $cos^2\,\theta = 1 - sin^2\,\theta = 1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{15} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}$ donc

$cos\ \theta = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ et $tan\,\theta = \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}}$

Successivement

$$tan\,\theta = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}}$$

$$tan\,\theta = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}}$$

$$tan\,\theta = \sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}-5\sqrt{5}+5}{25-5}}$$

$$tan\,\theta = \sqrt{\frac{20-8\sqrt{5}}{20}} = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$$