Solution du problème 542-2

Posons D = $(x/y + y/z + z/x)^2 - (x + y + z)(1/x + 1/y + 1/z)$. Il revient à prouver que D est positive. En développant il vient :

$D = (x/y)^2 + (y/z)^2 + (z/x)^2 + 2(x/z + y/x + z/y) - (3 + x/y + y/x + y/z + z/y + z/x + x/z)$

$\quad = (x/y)^2 + (y/z)^2 + (z/x)^2 - (x/y + y/z + z/x) + (x/z + y/x + z/y) - 3.$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$(x/y + y/z + z/x)^2 \leq 3[(x/y)^2 + (y/z)^2 + (z/x)^2]$$

D'où

$$D \geq (x/y + y/z + z/x)\,[(x/y + y/z + z/x)/3 - 1] + (x/z + y/x + z/y) - 3.$$

D'après l'inégalité de la moyenne géométrique,

$$(x/y + y/z + z/x) \geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{y}.\frac{y}{z}.\frac{z}{x}} = 3$$

De même

$$x/z + y/x + z/y \geq 3.$$

D'où $D \geq 0$, l'égalité n'ayant lieu que si $x/y = y/z = z/x$, soit $x = y = z$.

Jean-Christophe Laugier