542-1 Le triangle de Bottema

On utilise les coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B, C).

On note a, b, c les longueurs des côtés [BC], [CA], [AB].

1) Coordonnées des points D et E

Les centres des cercles exinscrits I_a, I_b, I_c, face à A, B, C, ont pour coordonnées :

$$I_a \left| \begin{array}{l} -a \\ b \\ c \end{array} \right. \qquad I_b \left| \begin{array}{l} a \\ -b \\ c \end{array} \right. \qquad I_c \left| \begin{array}{l} a \\ b \\ -c \end{array} \right.$$

La bissectrice extérieure en A est la droite (I_bI_c), d'équation : $cy + bz = 0$

La bissectrice extérieure en B est la droite (I_aI_c), d'équation : $cx + az = 0$

Les points D et E ont pour coordonnées : $D \left| \begin{array}{l} a \\ 0 \\ -c \end{array} \right. \qquad E \left| \begin{array}{l} 0 \\ b \\ -c \end{array} \right.$

2) Distances BD et AE

$$(a-c)\cdot\overrightarrow{BD} = a\cdot\overrightarrow{BA} - c\cdot\overrightarrow{BC}$$

$$\begin{aligned}(a-c)^2\cdot BD^2 &= 2a^2c^2 - 2ac\cdot\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 2a^2c^2 - 2a^2c^2\cdot\cos\hat{B} \\ &= 2a^2c^2 - ac\cdot(a^2+c^2-b^2) = ac\cdot(2ac - a^2 - c^2 + b^2) \\ &= ac\cdot(a+b-c)\cdot(-a+b+c)\end{aligned}$$

L'égalité $BD = AB$ se traduit par : $\qquad (a-c)^2\cdot c = a\cdot(a+b-c)\cdot(-a+b+c) \qquad (1)$

Le calcul de AE se déduit de celui de BD par l'échange de a et b.

L'égalité $AE = AB$ se traduit par : $\qquad (b-c)^2\cdot c = b\cdot(a+b-c)\cdot(a-b+c) \qquad (2)$

Par différence et somme des égalités (1) et (2), on obtient le système (S) suivant :

$$\begin{cases}(a-b)\cdot\left(c^2+(a+b)\cdot c-(a+b)^2\right)=0 & (3) \\ 2c^3-(a+b)\cdot c^2-(a^2+b^2)\cdot c+(a+b)\cdot(a-b)^2=0 & (4)\end{cases}$$

3) Cas des triangles isocèles en C : $a = b$

Le système (S) se résume à : $c^2 - ac - a^2 = 0$

On obtient : $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot a$

Dans un pentagone régulier convexe, le nombre d'or est le rapport d'une diagonale au côté.

Les points A, C, B sont donc trois sommets consécutifs d'un pentagone régulier convexe.

Les angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ mesurent $\frac{\pi}{5}$.

4) Cas des triangles non isocèles en C : $a \neq b$

L'égalité (3) du système (S) donne : $c = (a+b) \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{a+b}{\varphi}$, où φ désigne le nombre d'or

En remplaçant c par cette valeur dans l'égalité (4), on obtient : $a^2 - \frac{3\sqrt{5}+1}{2} \cdot ab + b^2 = 0$

Quitte à échanger a et b, on obtient : $\frac{b}{a} = \frac{1+3\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{3\sqrt{5}\cdot\varphi} = \frac{3\varphi-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\varphi+2}$

Par homogénéité, on peut supposer : $a = 1$

Alors : $b = \frac{3\varphi-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\varphi+2}$ et $c = \frac{\varphi+2}{2} + (\varphi-1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\varphi+2}$

On en déduit :

$$\cos\hat{A} = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc} = \frac{\varphi-1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\varphi+2}$$

$$\cos\hat{B} = \frac{a^2-b^2+c^2}{2bc} = \frac{\varphi-1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\varphi+2}$$

La touche Arccos de la calculatrice fournit les valeurs approchées de $\hat{A}$ et $\hat{B}$: $\frac{\pi}{15}$ et $\frac{11\cdot\pi}{15}$

On va vérifier que ces valeurs sont exactes.

5) Calcul de la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Le nombre $e^{i\frac{\pi}{5}}$ est racine du polynôme cyclotomique $\Phi_{10}(X) = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$

On pose $X + \frac{1}{X} = Y$

Si $X = e^{i\alpha}$, alors $Y = 2 \cdot \cos\alpha$

$$\frac{\Phi_{10}(X)}{X^2} = X^2 - X + 1 + \frac{1}{X} + \frac{1}{X^2} = Y^2 - Y - 1$$

Le nombre $2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est la racine positive du polynôme $Y^2 - Y - 1$

Donc : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\varphi}{2}$

6) Calcul des valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{15}\right)$ **et** $\cos\left(\frac{11 \cdot \pi}{15}\right)$

Les angles $\frac{\pi}{15}$ et $\frac{11 \cdot \pi}{15}$ sont deux angles parmi les trois angles α vérifiant : $3\alpha \equiv \frac{\pi}{5}$ (modulo 2π)

Le troisième angle est $\frac{7 \cdot \pi}{5}$

$$\cos\,(3\alpha) = 4 \cdot \cos^3\alpha - 3 \cdot \cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\varphi}{2}$$

En posant $X = 2 \cdot \cos\alpha$, on obtient : $X^3 - 3X - \varphi = 0$

Une solution facile de ce polynôme du troisième degré est :

$$\begin{aligned} X &= 2 \cdot \cos\left(\frac{7 \cdot \pi}{5}\right) = -2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{5}\right) = 2 - 4 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) \\ &= 2 - \varphi^2 = 1 - \varphi \end{aligned}$$

Le polynôme de factorise : $X^3 - 3X - \varphi = (X + \varphi - 1) \cdot (X^2 - (\varphi - 1) \cdot X - \varphi - 1)$

Les racines du facteur du second degré sont : $\frac{\varphi-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\varphi+2}$

Donc on obtient :

$$\cos\hat{A} = \frac{\varphi-1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\varphi+2}$$

$$\cos\hat{B} = \frac{\varphi-1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\varphi+2}$$