542-2 Une inégalité genre olympiades

On note : $\begin{cases} a = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} \\ b = \dfrac{x}{z} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{y}{x} \end{cases}$.

Le membre de droite de l'inégalité à démontrer s'écrit : $3 + a + b$

Ce membre de droite de l'inégalité est invariant par les six permutations sur x, y, z.

Mais le membre de gauche est invariant seulement par les trois permutations circulaires sur x, y, z.

Donc si l'on suppose que $x \leq y \leq z$, il faut démontrer les deux inégalités : $\begin{cases} a^2 \geq 3 + a + b \\ b^2 \geq 3 + a + b \end{cases}$

Or : $a - b = \dfrac{(x-y)\cdot(x-z)\cdot(z-y)}{xyz} \geq 0$

Il suffit donc de démontrer l'inégalité : $b^2 \geq 3 + a + b$ (1)

Le développement du carré de b donne : $b^2 = \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{z^2} + \dfrac{z^2}{x^2} + 2a$

L'inégalité du réordonnement pour les suites $x^2,\ y^2,\ z^2$ et $\dfrac{1}{x^2},\ \dfrac{1}{y^2},\ \dfrac{1}{z^2}$ donne : $b^2 \geq 3 + 2a$

Donc : $b^2 - 3 - a - b \geq a - b \geq 0$

L'inégalité (1) est ainsi démontrée.