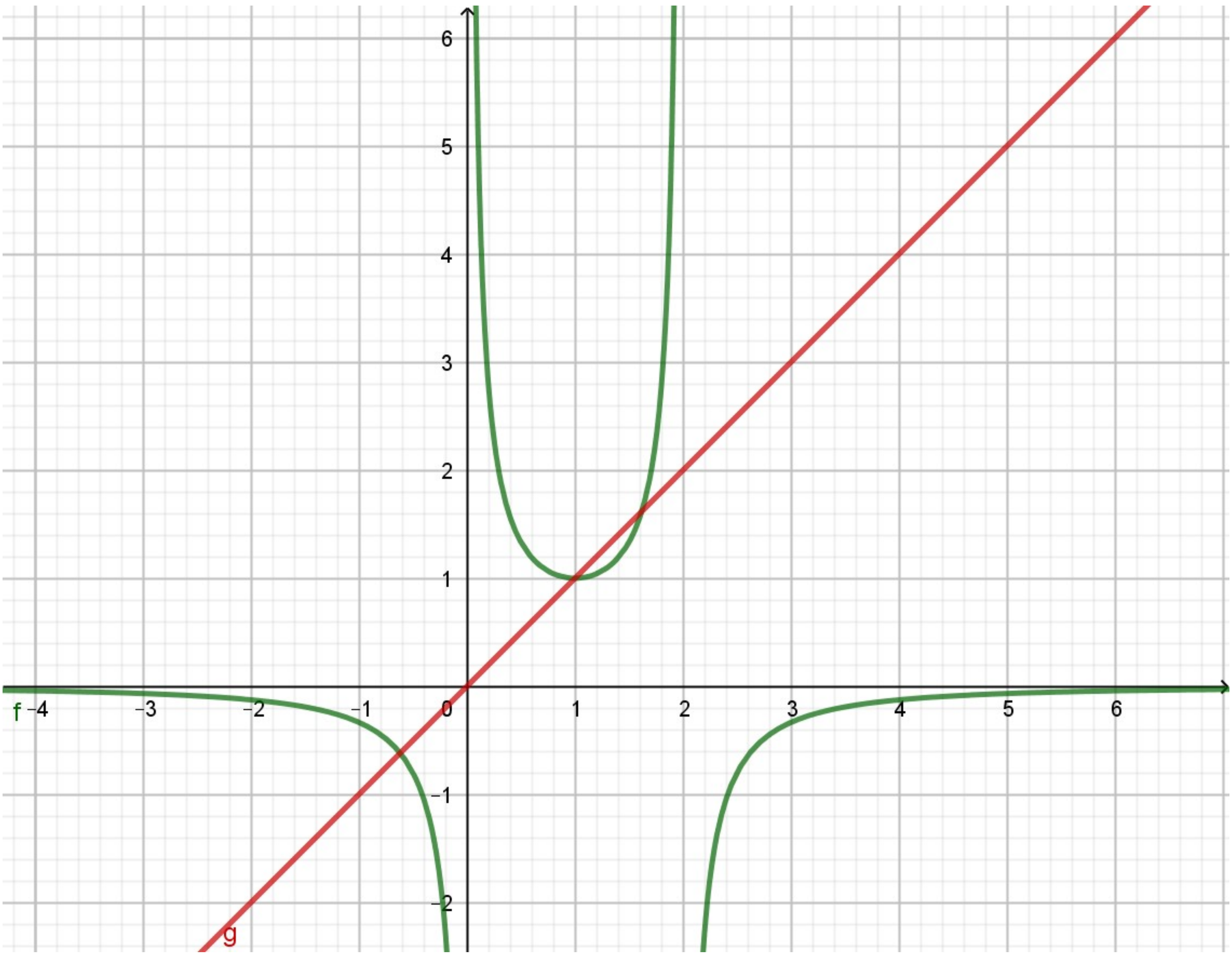
542-3 La onzième médiété

un+1/un plutôt dans la troisième fraction

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}=\frac{\frac{u_n}{u_{n+1}}}{2-\frac{u_{n+1}}{u_n}}=\frac{1}{2\cdot\frac{u_n}{u_{n+1}}-\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)^2}\qquad(1)$$

En posant $a_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $f(x)=\frac{1}{2x-x^2}$, la relation (1) s'écrit : $\begin{cases}a_{n+1}=f(a_n)\\a_0=a\end{cases}$

On étudie la fonction f dont le graphe est ci-dessous :



Les points fixes de la fonction f vérifient l'équation : $x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)\cdot(x^2 - x - 1) = 0$

Les solutions sont : $1,\ \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$f'(x) = \frac{2(x-1)}{(2x-x^2)^2}$, $f'(1) = 0$, $f'\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 2\cdot\left(2+\sqrt{5}\right)$, $f'\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 2\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)$

Les points fixes 1 et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sont attractifs alors que le point fixe $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est répulsif.

Lee antécédents de 2 par f sont : $1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Premier cas : $a < 0$

Les termes de la suite (a_n) sont tous strictement négatifs.

La suite (a_n) converge vers le point fixe $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

La suite (u_n) converge vers 0, approximativement comme une suite géométrique de raison $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Deuxième cas : $a > 2$

Le terme a_1 et on est ramené au cas précédent.

Troisième cas : $a = 0$

On montre par récurrence que pour tout entier naturel n : $\begin{cases} u_{2n+1} = 0 \\ u_{2n} = \frac{1}{2^n} \end{cases}$

La suite (u_n) converge vers 0.

Quatrième cas : $a = 2$

Le terme u_2 n'est pas défini et la suite (u_n) n'est pas définie.

Cinquième cas : $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Pour tout entier naturel n : $\begin{cases} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ u_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{cases}$

La suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Sixième cas : $a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Le terme a_1 est égal à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et on est ramené au cas précédent.

Septième cas : $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < a < 2$

La suite (a_n) est croissante au départ jusqu'au dépassement de la valeur 2 et on est alors ramené au deuxième ou quatrième cas.

Huitième cas : $0 < a < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Le terme a_1 est strictement compris entre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et 2 et on est ramené au cas précédent.

Neuvième cas : $1 < a < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

La suite (a_n) est décroissante et a pour limite 1 avec une vitesse de convergence quadratique.

Donc la suite (u_n) est croissante et converge vers une limite strictement positive.

Dixième cas : $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < a < 1$

Le terme a_1 est strictement compris entre 1 et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et on est ramené au cas précédent.

Onzième cas : $a = 1$

Donc la suite (u_n) est constante, égale à 1.

Conclusion

Donc la suite (u_n) converge vers une limite strictement dans les trois derniers cas, c'est-à-dire si :

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} < a < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$