542-4 Tiré d'un vieux numéro du Journal de Mathématiques Elémentaires

On utilise les coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B, C).

On note a et b les longueurs des côtés [BC] et [CA].

Les points D et F sont les symétriques des points E et G par rapport à la médiatrice de [BC].

On note x la longueur commune des côtés du pentagone AFDEG.

1) Coordonnées des points E et G et calcul de la distance EG

Soit M le milieu de [BC].

Le point E est barycentre de $(M,\ a-x)$ et $(C,\ x)$.

Les points M et C ont pour coordonnées de même somme : $M \left| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right. \qquad C \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \right.$

Donc le point E a pour coordonnées : $E \left| \begin{matrix} 0 \\ a-x \\ a+x \end{matrix} \right.$

Le point G est barycentre de $(A,\ b-x)$ et $(C,\ x)$.

Donc le point G a pour coordonnées : $G \left| \begin{matrix} b-x \\ 0 \\ x \end{matrix} \right.$

On en déduit : $\begin{cases} 2ab\cdot\overrightarrow{CE} = b\cdot(a-x)\cdot\overrightarrow{CB} \\ 2ab\cdot\overrightarrow{CG} = 2a\cdot(b-x)\cdot\overrightarrow{CA} \end{cases}$

Par différence : $2ab\cdot\overrightarrow{EG} = 2a\cdot(b-x)\cdot\overrightarrow{CA} + b\cdot(x-a)\cdot\overrightarrow{CB}$

Donc :
$$\begin{aligned} 4a^2b^2\cdot EG^2 &= 4a^2b^2\cdot(b-x)^2 + a^2b^2\cdot(x-a)^2 + 4ab\cdot(b-x)\cdot(x-a)\cdot\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} \\ &= 4a^2b^2\cdot(b-x)^2 + a^2b^2\cdot(x-a)^2 + 2ab\cdot(b-x)\cdot(x-a)\cdot a^2 \end{aligned}$$

Et : $4b\cdot EG^2 = 4b\cdot(x-b)^2 + b\cdot(x-a)^2 - 2a\cdot(x-b)\cdot(x-a)\cdot$

2) Equation vérifiée par x

En remplaçant EG par x dans l'égalité ci-dessus, on obtient :

$P(x) = (b-2a)\cdot x^2 - 2\cdot(4b^2-a^2)\cdot x + b\cdot(4b^2-a^2) = 0$

L'inégalité du triangle ABC impose : $a < 2b$

L'appartenance de E à [BC] et de G à [AC] impose : $0 < x < a$ et $0 < x < b$

Le discriminant réduit de P est : $\Delta' = (a+b)\cdot(3b-a)\cdot(4b^2-a^2) > 0$

Premier cas : $\frac{a}{2} < b < 2a$

Le produit des racines de P est strictement négatif

Le polynôme P admet donc deux racines x et x '', avec $x'' < 0$ et $x' > 0$

$$\begin{cases} P(0) = b\cdot(4b^2-a^2) > 0 \\ P(a) = 4b^2\cdot(b-2a) < 0 \\ P(b) = b\cdot(a+b)\cdot(a-3b) < 0 \end{cases}$$

Donc : $0 < x' < a$ et $0 < x' < b$

Il existe bien un pentagone solution, avec : $x' = \dfrac{4b^2-a^2+\sqrt{(a+b)\cdot(3b-a)\cdot(4b^2-a^2)}}{b-2a}$

Deuxième cas : $b = 2a$

Le degré de P se réduit à 1 : $P(x) = -30a^2\cdot(x-a)$

Le point E se confond avec C et le point G est le milieu de [AC].

Le pentagone est dégénéré en triangle.

Troisième cas : $b > 2a$

Le polynôme P admet deux racines x et x '' strictement positives.

$$\begin{cases} P(a) = 4b^2\cdot(b-2a) > 0 \\ \dfrac{x'+x''}{2} - a = \dfrac{4b^2-a^2}{b-2a} - a = \dfrac{4b^2+a^2-ab}{b-2a} = \dfrac{(2a-b)^2+15\cdot b^2}{4\cdot(b-2a)} > 0 \end{cases}$$

Donc : $x' > a$ et $x'' > a$

Il n’existe pas de pentagone solution.