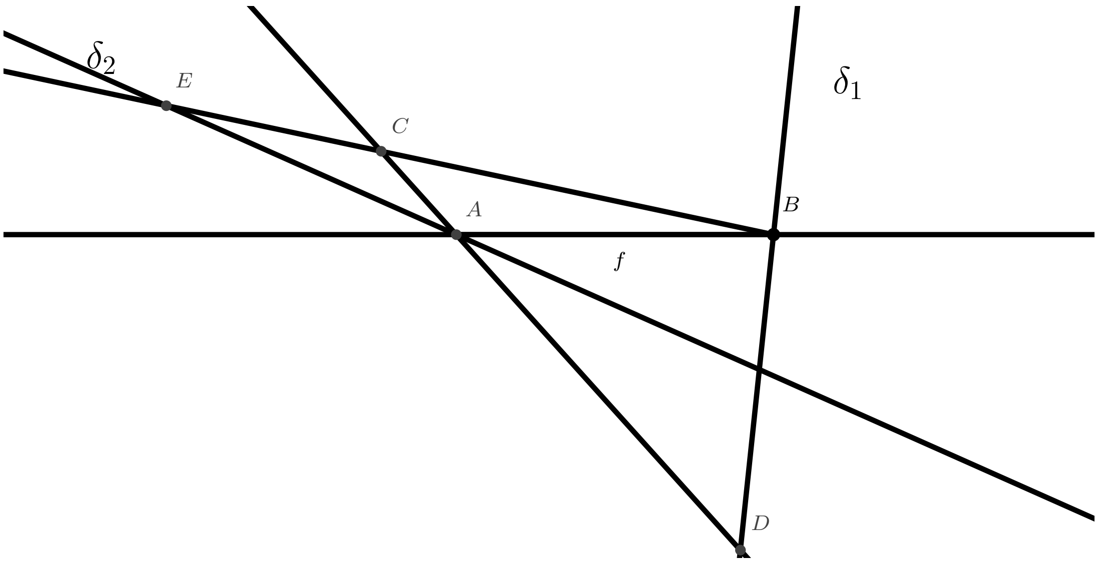
542.1 Le triangle de Bottema



Notons $\alpha = \widehat{BAC} = \widehat{A}$ et $\beta = \widehat{ABC} = \widehat{B}$
La bissectrice extérieure de $\widehat{B}$ coupe la droite (AC) en D et la bissectrice extérieure de $\widehat{A}$ coupe la droite (BC) en E .
Si $BD = AE = AB$ alors on déduit que le triangle ABE est isocèle en A et que le triangle ABD est isocèle en B.

Le triangle ABE est isocèle en A , on en déduit que $\widehat{AEB} = \widehat{ABE} = \beta$.

Déterminons $\widehat{BAE}$: $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE}$
La droite (AE) étant la bissectrice extérieure de $\widehat{A}$, $\widehat{CAE} = \dfrac{\pi - \alpha}{2}$
on obtient alors $\widehat{BAE} = \alpha + \dfrac{\pi - \alpha}{2} = \dfrac{\pi + \alpha}{2}$
Dans le triangle ABE ,la somme des angles étant égale à π , on déduit que :
$\dfrac{\pi + \alpha}{2} + 2\beta = \pi$ ce qui équivaut à $\alpha + 4\beta = \pi$
Le triangle ABD étant isocèle en B on déduit que $\widehat{BAD} = \widehat{ADB} = \pi - \alpha$.
La droite (AD) étant la bissectrice extérieure de $\widehat{B}$, $\widehat{ABD} = \dfrac{\pi - \beta}{2}$
La somme des angles d'un triangle étant égale à π , on déduit que :
$\dfrac{\pi - \beta}{2} + 2(\pi - \alpha) = \pi$ ce qui équivaut à $4\alpha + \beta = 3\pi$
Les nombres α et β sont solution du système : $\begin{cases} 4\alpha + \beta &= 3\pi \\ \alpha + 4\beta &= \pi \end{cases}$
On trouve $\alpha = \dfrac{11\pi}{15}$ et $\beta = \dfrac{\pi}{15}$ donc $\widehat{A} = \dfrac{11\pi}{15} = 132°$ et $\widehat{B} = \dfrac{\pi}{15} = 12°$
Vérification :
$\widehat{A} = 132°$ donc $\widehat{CAE} = \dfrac{180 - 132}{2} = 24°$
$\widehat{BAE} = 132 + 24 = 156°$,on déduit $\widehat{AEB} = 180 - (156 + 12) = 180 - 168 = 12°$
Comme $\widehat{ABE} = 12°$, $\widehat{AEB} = \widehat{ABE}$ le triangle AEB est donc isocèle en A donc $AE = AB$.
$\widehat{DAB} = 180 - 132 = 48°$, $\widehat{ABD} = \dfrac{180 - 12}{2} = 84°$ on trouve alors $\widehat{ADB} = 180 - (48 + 84) = 48°$

$\widehat{DAB} = \widehat{ADB}$ donc le triangle ABD est isocèle en B par conséquent $BA = BD$
donc $BD = BA$ et $AE = AB$, ce qui équivalent à $BD = AE = AB$.