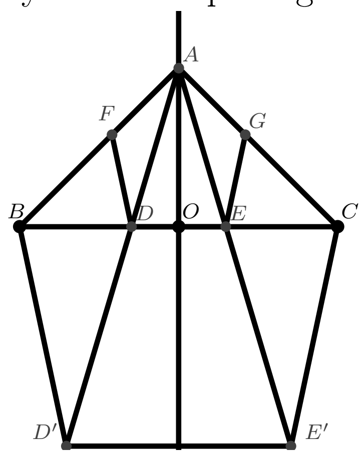
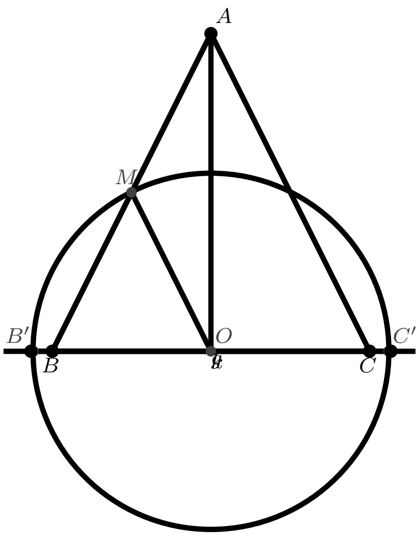
542.4 Tiré d'un vieux journal de mathématiques élémentaires

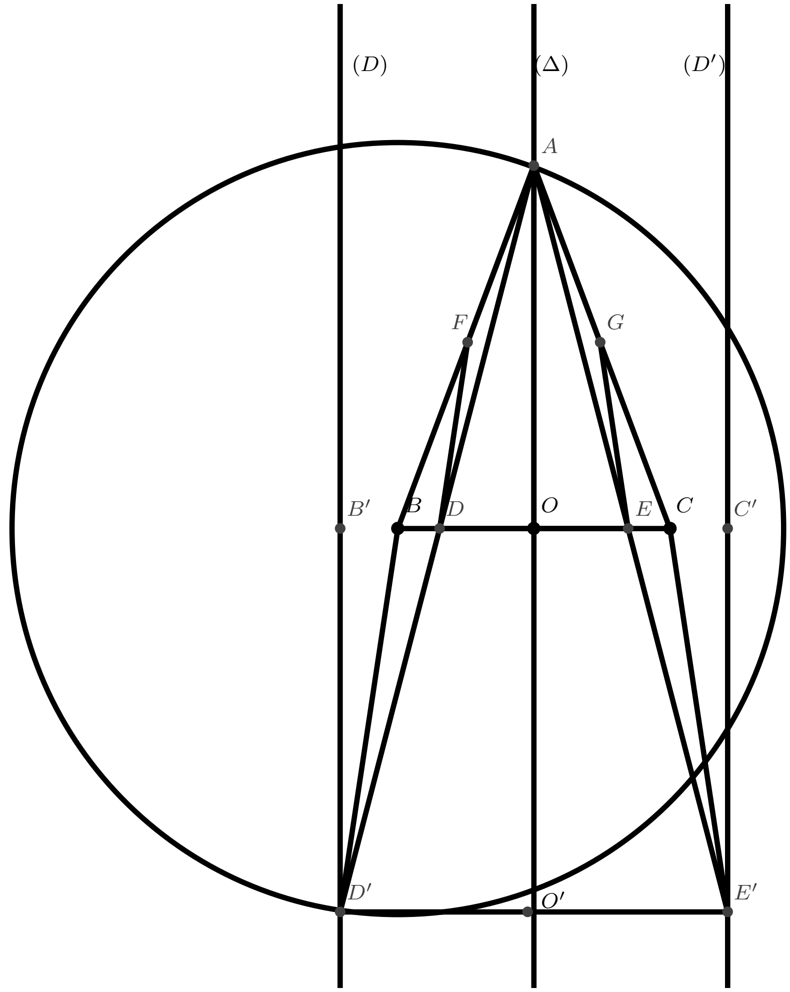
Supposons qu'il existe un pentagone AFDEG dont les côtés sont sont de même mesure avec $F \in [AB]$, $G \in [AC]$, $D \in [BC]$ et $E \in [AB]$.

Le triangle ABC étant isocèle en A , la droite (AO) où O le milieu du segment $[BC]$ est l'axe de symétrie du triangle.Notons (Δ) cet axe de symétrie.
(Δ) est aussi l'axe de symétrie du pentagone AFDEG.



Considérons alors l'homothétie h de centre A telle que l'image du point F soit le point B.
L'image par h du pentagone AFDEG est le pentagone ABD'E'C.
Le pentagone ABD'E'C a , comme AFDEG , la droite (Δ) comme axe de symétrie.
Comme les côtés du pentagone AFDEG sont égaux , on déduit que les côtés du pentagone ABD'E'C sont égaux et en particulier $D'E' = AB$
Soit B' et C' les projetés orthogonaux respectifs des points D' et E' sur la droite (BC) .On a $B'C' = D'E' = AB$ et O est le milieu de $[B'C']$.
Par conséquent le point D' appartient à la parallèle à (Δ) passant par B' et D' appartient au cercle de centre B et de rayon BA car $BD' = D'E'$
• Construction des points F, D , E et G .
On construit le pentagone ABD'E'C puis le point D et ensuite par l'homothétie h^{-1} de centre A telle que l'image de D' est le point D , l'image du pentagone ABD'E'C est le pentagone AFDEG.
1°) Pour construire le point D',on construit le segment $[B'C']$. tel que $B'C' = AB$ et O est le milieu de $[B'C']$.Pour cela , on procède de la façon suivante : on construit le point M le milieu de $[AB]$, comme le triangle BOA est rectangle en O, $OM = \dfrac{1}{2}AB$.Le cercle de centre O et de rayon OM coupe la droite (BC) aux points B' et C' tels que $B'C' = 2OM = AB$.





2°) On trace la droite (D) parallèle à la droite (Δ) passant par le point B' et la droite (D') parallèle à la droite (Δ) passant par C' .

3°) Le cercle de centre B et de rayon BA coupe la droite (D) en deux points, le point D' étant le point appartenant au demi-plan de frontière la droite (BC) ne contenant pas le point A.

4°) On obtient le point E' par la symétrie par rapport à (Δ) du point D'.
Le pentagone ABD'E'C est un pentagone d'axe de symétrie (Δ) et ses côtés sont de même longueur.

5°) Il faut que la droite (AD') coupe le segment $[BC]$ en un point D tel que $D \in]OB[$ et $OD < OB$ .Le point B est la position limite du point D.
Si D $=$ B alors D est le milieu de $[AD']$. $DO = \dfrac{1}{2}D'O'$ et $DO = BO = \dfrac{1}{2}BC$
donc $D'O' = BC$ comme $D'O' = \dfrac{1}{2}D'E' = \dfrac{1}{2}AB$ dans ce cas $BC = \dfrac{1}{2}AB$
$AB = 2BC$.Cette valeur $2BC$ est la valeur maximale de AB
Pour que D existe , il faut que $AB < 2BC$
Par l'homothétie h^{-1} , c'est à dire l'homothétie de centre A telle que l'image de D' est le point D,le pentagone ABD'E'C a pour image le pentagone AFDEG qui a ses côtés égaux comme ceux du pentagone ABD'E'C