Solution du problème 541-1

Soit M le milieu du segment [FE] qui est aussi le milieu de [BD] car DF=BE. Le centre de gravité du triangle ABD est le point G_1 défini par $\overline{AG_1}=\frac{2}{3}\overline{AM}$ et le centre de gravité du triangle AFE est aussi G_1. De même le point G_2 défini par $\overline{CG_2}=\frac{2}{3}\overline{CM}$ est le centre de gravité des triangles DCB et FCE.
Soit alors G le centre de gravité du quadrilatère plein ABCD et G' le centre de gravité du triangle AFC. Soit AH la hauteur issue de A du triangle DAB qui est aussi la hauteur issue de A du triangle AFE et CK la hauteur issue de C du triangle DCB qui est aussi la hauteur issue de C du triangle FCE.
G est le barycentre des points G_1 et G_2 affectés des coefficients égaux aux aires des triangles DAB et BCD respectivement.
G=Bar[(G_1,$\frac{1}{2}BD \times AH$); $(G_2, \frac{1}{2}BD \times CK)$] = Bar[($G_1$,AH);($G_2$,CK)] car le barycentre ne change pas si on divise tous les coefficients par un même nombre. De même
G'=Bar[(G_1,$\frac{1}{2}FE \times AH$); $(G_2, \frac{1}{2}FE \times CK)$]=Bar[($G_1$,AH);($G_2$,CK)].
On voit que G=G'.