

À quelle condition, la somme de trois réels et du produit de leurs inverses est-elle égale à la somme de leur produit et de la somme de leurs inverses ?

RÉPONSE :

Soient a, b, c , trois réels non nuls et les sommes

$$S = a + b + c + \frac{1}{a} \times \frac{1}{b} \times \frac{1}{c}$$

$$S' = a \times b \times c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

On peut écrire :

$$S = \frac{a^2bc + ab^2c + abc^2}{abc} \quad \text{et} \quad S' = \frac{a^2b^2c^2 + bc + ca + ab}{abc}$$

$$S = S' \text{ si et seulement si } a^2bc + ab^2c + abc^2 + 1 - a^2b^2c^2 - bc - ca - ab = 0$$

Écrivons le premier membre de cette égalité sous forme d'un polynôme P du second degré en a :

$$P = (bc - b^2c^2)a^2 + (b^2c + bc^2 - c - b)a - bc + 1$$

$$P = [bc(1 - bc)]a^2 - (b + c)(1 - bc)a + 1 - bc$$

$$P = (1 - bc)[bca^2 - (b + c)a + 1]$$

Écrivons le crochet sous forme d'un polynôme du premier degré en b :

$$P = (1 - bc)[(a^2c - a)b + 1 - ca]$$

$$P = (1 - bc)[(ca - 1)ab + 1 - ca]$$

$$P = (1 - bc)(1 - ca)(1 - ab)$$

Donc $S = S'$ si et seulement si $ab = 1$, ou $bc = 1$, ou $ca = 1$, c'est-à-dire :
si et seulement si au moins deux des trois nombres sont inverses l'un de l'autre.