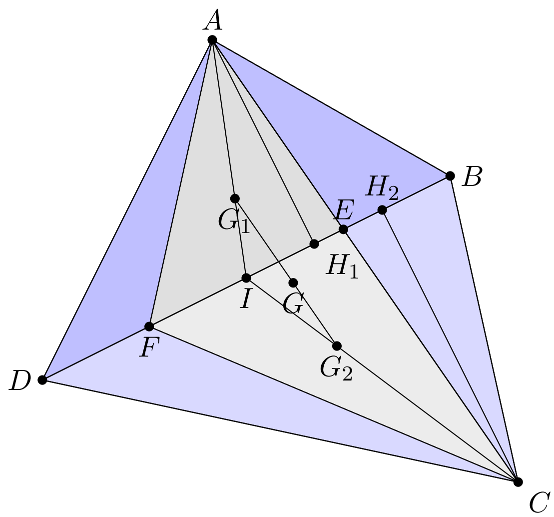
Exercice 541-1
Construction du centre de gravité d'un quadrilatère plein.

Patrick David (david@ensea.fr)

Novembre 2021



Proposition 1: Soit (M_1, M_2, M_3) un triangle. Le barycentre du triangle plein (M_1, M_2, M_3) est aussi l'isobarycentre des trois sommets M_1, M_2, M_3. C'est l'intersection des médianes de ce triangle.

Démonstration : Le barycentre de tout segment parallèle au côté $[M_2, M_3]$ et reliant les côtés $[M_1, M_2]$ et $[M_1, M_3]$ est au milieu de ce segment et donc sur la médiane issue de M_1. Le barycentre du triangle plein est donc à l'intersection des trois médianes.

Remarque : La construction géométrique d'isobarycentres de points est plus simple que celle de barycentre de polygones pleins, le fait que ces deux notions coïncident pour le triangle est intéressant.

Le quadrilatère (A, B, C, D) étant convexe, l'intersection E des deux diagonales est à l'intérieur du quadrilatère. Soit B un sommet plus proche de E que le sommet opposé, et F tel que $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EB}$. On suppose pour l'instant que E n'est pas le milieu de $[D, B]$, c'est à dire que $E \neq F$.

Proposition 2: Soient I, le milieu de $[D, B]$.

1. I est aussi le milieu de $[F, E]$.
2. Les isobarycentres des triangles (A, D, B) et (A, F, E) sont confondus au point G_1 situé aux 2/3 du segment $[A, I]$ à partir de A.
3. Les barycentres des triangles pleins (A, D, B) et (A, F, E) sont aussi confondus au point G_1.

Démonstration :

1. Comme $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EB}$ on a bien $\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{EI}$
2. $[A, I]$ est donc la médiane issue de A pour les triangles (A, D, F) et (A, E, B).

3. D"après la proposition 1, G_1 est bien aussi barycentre des triangles pleins (A, D, B) et (A, F, E).

On a la même propriété pour les triangles (C, D, B) et (C, F, E). $G2$ situé aux 2/3 de $[C, I]$ à partir de C est l'isobarycentre et le barycentre des triangles pleins (C, D, B) et (C, F, E).

Proposition 3: Soient AH_1 et CH_2 les longueurs des hauteurs des triangles (A, D, B) et (A, F, E) d'une part et (C, D, B) et (C, F, E). Alors les aires des triangles (C, D, B) et (C, F, E) sont respectivement égales à celles des triangles (A, D, B) et (A, F, E) multipliées par $\frac{CH_2}{AH_1}$.

Démonstration : Les bases des triangles sont les mêmes et on multiplie par le rapport des hauteurs.

Notation. On note ici $\text{Bary}((\alpha_1, M_1), \cdot, (\alpha_k, M_k))$ le barycentre des points pondérés $(\alpha_1, M_1), \cdot, (\alpha_k, M_k))$, et $\text{BaryP}(M_1, \cdot, M_k)$ le barycentre du polygone non croisé plein.

D'après ce qui précède et par homogénéité des barycentres des barycentres on a :

Théorème 4: Le barycentre du quadrilatère convexe plein (A, B, C, D) est le même que celui du triangle plein (A, F, C), et donc aussi celui de l'isobarycentre des points (A, F, C).

Démonstration : D'après ce qui précède et par homogénéité des barycentres on a :

$\text{BaryP}(A, B, C, D) = \text{Bary}((\text{aire}(A, B, D), \text{BaryP}(A, B, D)), (\text{aire}(C, B, D), \text{BaryP}(C, B, D)))$ $= \text{Bary}((\text{aire}(A, B, D), G_1), (\text{aire}(C, B, D), G_2) = \text{Bary}((\text{aire}(A, F, E), G_1), (\text{aire}(C, F, E), G_2) =$ $\text{BaryP}(A, F, C, E) = \text{BaryP}(A, F, C)$

car le quadrilatère (A, F, C, E) est le triangle (A, F, C) puisque A, E, C sont alignés.

Remarque : . Dans le cas ou E est le milieu de $[B, D]$, on a $E = F$ et les triangles (A, E, F) et (C, E, F) sont applatis et la méthode précédente ne s'applique pas. On a deux cas :

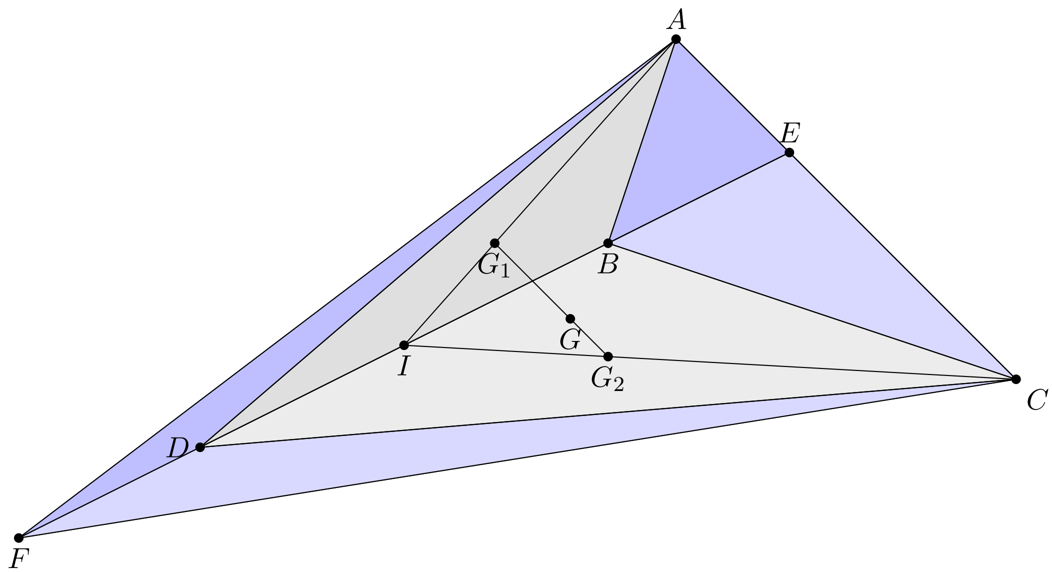
Si E n'est pas le milieu de $[A, C]$ on utilise la même méthode en échangeant $[A, C]$ et $[B, D]$.

Si E est aussi le milieu de $[A, C]$,(A, B, C, D) est un parallélogramme de centre E. Le barycentre du parallélogramme plein est invariant par la symétrie de centre E. C'est donc le point E.

Remarque : . Cette propriété reste valable pour un quadrilatère (A, B, C, D) non convexe mais non croisé. Dans ce cas les points E et F sont à l'extérieur du quadrilatère, mais les triangles de part et d'autre de la diagonale (BD) ainsi que leurs isobarycentres ont les mêmes propriétés.

Le quadrilatère (A, B, C, D) étant non convexe et non croisé, l'intersection E des deux diagonales est à l'extérieur du quadrilatère. La diagonale $[BD]$ est celle qui est à l'intérieur du quadrilatère.Soit B le sommet plus proche de E que le sommet opposé, et F tel que $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EB}$.

Théorème 5: Le barycentre du quadrilatère non convexe et non croisé (A, B, C, D) est le même que celui du triangle plein (A, F, C), et donc aussi celui de l'isobarycentre des points (A, F, C).



Remarque : On ne peut pas généraliser la propriété aux quadrilatères croisés, car on perd la notion d'aire et de barycentre de cette surface pleine.