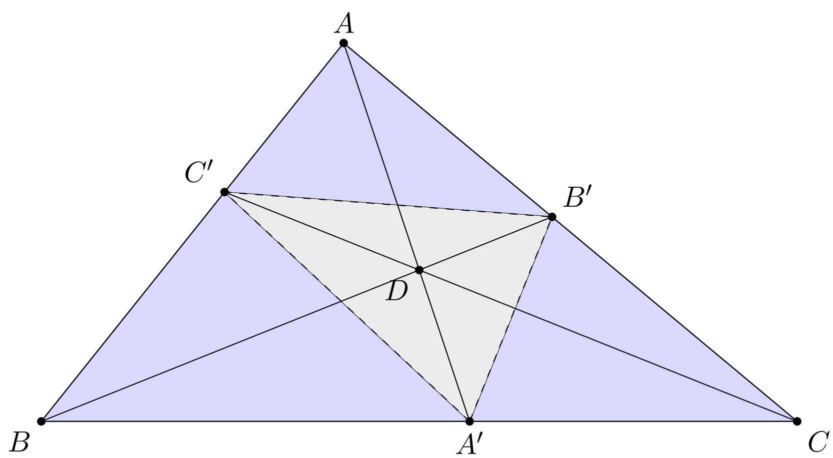
Aire et barycentres.

Patrick David (david@ensea.fr), Julien Sautier (sautier.julien@orange.fr)

Septembre 2021



I. Notations et propriétés générales.

Soit un triangle quelconque (A, B, C) d'aire géométrique s, (A, B, C) étant aussi un repère barycentrique du plan. Dans la suite, on distinguera les coordonnées barycentriques "générales" (u, v, w) d'un point M avec $u + v + w \neq 0$, et les coordonnées barycentriques "normalisées" avec $u + v + w = 1$, et on notera dans ce cas $M[u, v, w]$. Soit D un point intérieur à (A, B, C) de coordonnées barycentriques normalisées (α, β, γ) toutes trois strictement positives.

Proposition 1: Si (M_1, M_2, M_3) est un triangle avec pour coordonnées barycentriques normalisées respectives $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = m_i$. Alors l'aire algébrique de (M_1, M_2, M_3) est $\det(m_1, m2, m3)s$.

Démonstration: À voir.

II. Coordonnées et aires des autres triangles.

Proposition 2: Proposition. Les aires géométriques des triangles (D, B, C), (resp : (D, C, A), (D, A, B)) sont $a = \alpha s$, (resp : $b = \beta s$,$c = \gamma s$).

Démonstration:

$$\text{aire}(D, B, C) = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \end{vmatrix} s = \alpha s.$$

Même chose pour (D, C, A) et (D, A, B).

Remarque: Des coordonnées barycentriques de D sont donc (a, b, c), et les coordonnées barycentriques normalisées sont $(\frac{a}{s}, \frac{b}{s}, \frac{c}{s})$ puisque $a + b + c = s$.

Les intersections A' (resp. B', C') de (AD) avec (BC) (resp. (BD) avec (CA), (CD) avec (AB)) ont pour coordonnées barycentriques respectives $(0, b, c)$, $(a, 0, c)$, $(a, b, 0)$. Pour les normaliser on pose $\hat{a} = b + c, \hat{b} = c + a, \hat{c} = a + b$. On a donc $A'[0, \frac{b}{\hat{a}}, \frac{c}{\hat{a}}]$, $B'[\frac{a}{\hat{b}} 0, \frac{c}{\hat{b}}]$ et $C'[\frac{a}{\hat{c}}, \frac{b}{\hat{c}}, 0]$.

Proposition 3: Proposition. Les aires géométriques des triangles (A, C', B'), (resp : (B, A', C'), (C, B', A')) sont $p = \frac{bc}{\hat{b}\hat{c}}s$, (resp : $q = \frac{ca}{\hat{c}\hat{a}}s$,$r = \frac{ab}{\hat{a}\hat{b}}s$).

Démonstration: aire$(A, C', B') = \begin{vmatrix} 1 & \frac{a}{\hat{c}} & \frac{a}{\hat{b}} \\ 0 & \frac{b}{\hat{c}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{\hat{b}} \end{vmatrix} s = \frac{bc}{\hat{b}\hat{c}}s.$

De même pour (B, A', C'), (C, B', A').

Proposition 4: Proposition. L'aire géométrique du triangle (A', B', C') est $x = 2\frac{abc}{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}s$.

Démonstration:

$x =$ aire(A',B',C')$= \begin{vmatrix} 0 & \frac{a}{\hat{b}} & \frac{a}{\hat{c}} \\ \frac{b}{\hat{a}} & 0 & \frac{b}{\hat{c}} \\ \frac{c}{\hat{a}} & \frac{c}{\hat{b}} & 0 \end{vmatrix} s = \frac{abc}{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} s = 2\frac{abc}{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}s.$

Remarque: On a aussi par découpage du triangle (A, B, C) :
$x + (p + q + r) = s$

III. Racines du polynôme $P(u) = u^3 + (p + q + r)u^2 - 4pqr$.

Proposition 5: x est la seule racine positive du polynôme $P(u) = u^3 + (p + q + r)u^2 - 4pqr$.

Démonstration:
D'après la proposition 3, $pqr = \frac{a^2b^2c^2}{\hat{a}^2\hat{b}^2\hat{c}^2}s^3$. D'après la proposition 4, $x^2 = 4\frac{a^2b^2c^2}{\hat{a}^2\hat{b}^2\hat{c}^2}s^2$.

Donc $x^2s = 4pqr$, et d'après la remarque $x^2s = x^2(x + (p + q + r)) = 4pqr$. Donc $x^3 + (p + q + r)x^2 - 4pqr = 0$.

Comme $P(0) = -4pqr < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$, P admet au moins une racine réelle sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, comme $P'(u) = 3u^2 + 2(p+q+r)u > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, P est strictement croissante et x est bien l'unique racine strictement positive.

IV. Racines du polynôme $P(u) = u^3 + (p + q + r)u^2 - 4pqr$

.

Proposition 6: Le polynôme $P(u) = u^3 + (p+q+r)u^2 - 4pqr$ a toutes ses racines réelles dont une seule positive.

Démonstration: On suppose ici que $\{p, q, r\} \subset \mathbb{R}_+^*$. Soit $k > 0$.

$k^3P(u) = (ku)^3 + k(p + q + r)(ku)^2 - 4k^3pqr$. En choisissant $k = \frac{1}{p+q+r}$ et en posant $U = ku$, $p' = kp, q' = kq, r' = kr$ on a avec $p' + q' + r' = 1$ et on transforme le polynôme $P(u)$ en :

$Q(U) = U^3 + U^2 - 4p'q'r'$.

$Q'(U) = 3U^2 + 2U$ a pour racines 0 et $\frac{-2}{3}$. On a déjà vu que P et aussi Q a une unique racine strictement positive.

P et aussi Q ont deux racines réelles strictement négatives ssi
$Q(\frac{-2}{3}) = \frac{4}{27} - 4p'q'r' > 0$, et une racine double strictement négative ssi
$Q(\frac{-2}{3}) = \frac{4}{27} - 4p'q'r' = 0$. Il faut donc étudier l'inégalité $\frac{1}{27} \geq p'q'r'$

Pour l'étude des extréma sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$de $p'q'r'$ sous la contrainte $p'+q'+r'=1$, on écrit que les gradients de $p'q'r'$ et de $p'+q'+r'-1$ sont colinéaires. Ce qui montre que l'on a un maximum sous contrainte de $p'q'r'$pour $p'=q'=r'=\frac{1}{3}$ et que ce maximum vaut $\frac{1}{27}$.

En conclusion, si $p=q=r$, $P(u)$ admet la racine négative double $-2p$ et la racine positive p. Dans les autres cas, $P(u)$ admet une unique racine strictement positive et deux racines strictement négatives distinctes.

Remarque: . Dans le cas ou $p=q=r$, on a $p=\frac{bc}{\hat{b}\hat{c}}s=q=\frac{ca}{\hat{c}\hat{a}}s=r=\frac{ab}{\hat{a}\hat{b}}s$. Donc dans ce cas $\frac{bc}{\hat{b}\hat{c}}=\frac{ca}{\hat{c}\hat{a}}=\frac{ab}{\hat{a}\hat{b}}$ ce qui implique $\frac{a}{\hat{a}}=\frac{b}{\hat{b}}=\frac{c}{\hat{c}}$. Or

$$\left\{\begin{array}{l} a(c+a)=b(b+c) \\ a(a+b)=c(b+c) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2+ac=b^2+bc \\ a^2+ab=c^2+bc \end{array}\right.$$

Donc $a(c-b)=(b-c)(b+c) \Rightarrow b=c\,\text{ou}\,a=-b-c$.

Comme la résolution se fait dans $(\mathbb{R}_+^*)^3$, on en déduit $b=c$ puis par permutation circulaire $a=b=c$. Le cas $p=q=r$ correspond donc à $a=b=c$ c'est-à-dire que D est l'isobarycentre de (A,B,C), A',B',C' sont les milieux des côtés. On a alors $p=q=r=x=\frac{s}{4}$.