Exercice 541-4
Résolution de l'équation :
$a+b+c+\frac{1}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+abc.$

Patrick David (david@ensea.fr)

Novembre 2021

I. Notations et propriétés générales.

Pour avoir de bonnes notations afin d'aborder le cas général, pour $a_k \in \mathbb{C}^*$ posons : $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $si_n=\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$, $p_n=\prod\limits_{k=1}^{n} a_k$, $pi_n=\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$
L'équation proposée s'écrit alors : eq_3 : $s_3+pi_3=si_3+p_3$. On peut la généraliser naturellement avec pour $n \in \mathbb{N}^*$ avec eq_n : $s_n+pi_n=si_n+p_n$.

À cause de la symétrie des fractions rationnelles utilisées, toute permutation d'une solution de eq_n est encore une solution de eq_n. Pour éviter les répétitions, on conviendra que $((a_1,\cdots,a_n))$ est l'ensemble de toutes les permutations de $(a_1,\cdots,a_n)$. Par exemple, $((1,2))=\{(1,2),(2,1)\}$. De même, on note $((\alpha,\mathbb{C}^*))=\{\alpha\}\times\mathbb{C}^*\cup\mathbb{C}^*\times\{\alpha\}$. On note aussi S_n l'ensemble des solutions de l'équation eq_n.

Soit $R_n(a_1,\cdots,a_n)=s_n+pi_n-si_n-p_n$.

II. Résolution des cas $n \leq 3$.

On a immédiatement $S_1=\mathbb{C}^*$.

Le polynôme en x du second degré :
$xR_2(a_1,x)=a_1x+x^2+\frac{1}{a_1}-\frac{x}{a_1}-1-a_1x^2=(1-a_1)x^2+(a_1-\frac{1}{a_1})x+(\frac{1}{a_1}-1)$
admet pour racines évidentes $\{1,\frac{1}{a_1}\}$. Donc $S_2=((1,\mathbb{C}^*))\cup((a_1,\frac{1}{a_1}))\}$.

Le polynôme du second degré en $xR_3(a_1,a_2,x)=a_1x+a_2x+x^2+\frac{1}{a_1a_2}-\frac{x}{a_1}-\frac{x}{a_2}-1-a_1a_2x^2=(1-a_1a_2)x^2+(a_1+a_2-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2})x+(\frac{1}{a_1a_2}-1)$ a pour sommes des racines $S=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}$ et pour produit des racines $P=\frac{1}{a_1a_2}$ Ses racines sont donc $\{\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2}\}$. Donc les racines sont de la forme $((\alpha,\frac{1}{\alpha},\mathbb{C}^*))$ avec $\alpha\in\mathbb{C}^*$.

III. Constructions de solutions de formes particulières pour tout n.

Proposition 1: Si $((a_1,\cdots,a_n))$ est une solution de eq_n, alors $((a_1,\cdots,a_n,1))$ est une solution de eq_{n+1}

Démonstration:

$R_{n+1}((a_1, \cdots, a_n, 1) = s_n + 1 + pi_n - si_n - 1 - p_n = s_n + pi_n - si_n - p_n = R_n((a_1, \cdots, a_n) = 0$

Proposition 2: Si $((a_1, \cdots, a_n))$ est une solution de eq_n, alors $\forall \alpha \in \mathbb{C}^*$, $((a_1, \cdots, a_n, \alpha, \frac{1}{\alpha}))$ est une solution de eq_{n+2}

Démonstration:
$R_{n+2}((a_1, \cdots, a_n, \alpha, \frac{1}{\alpha}) = s_n + \alpha + \frac{1}{\alpha} + pi_n - si_n - \frac{1}{\alpha} - \alpha - p_n = s_n + pi_n - si_n - p_n = R_n((a_1, \cdots, a_n) = 0$

Corollaire 3: Si $((a_1, \cdots, a_n))$ est une solution de eq_n, on peut construire une solution de eq_p pour $p > n$ en adjoignant à $((a_1, \cdots, a_n))$ un nombre suffisant de 1 et de paires $\alpha, \frac{1}{\alpha}$.

Cela montre que pour tout n il y a une infinité de solutions de eq_n.

Mais il est facile de trouver aussi pour $n > 3$ des solutions ne comportant pas nécessairement de 1, ni de paires $\alpha, \frac{1}{\alpha}$.

On peut trouver par exemple :
$\left(\left(-1, 2, 3, \frac{1}{84}\left(-\sqrt{1801} - 25\right)\right)\right)$ comme solutions de eq_4.