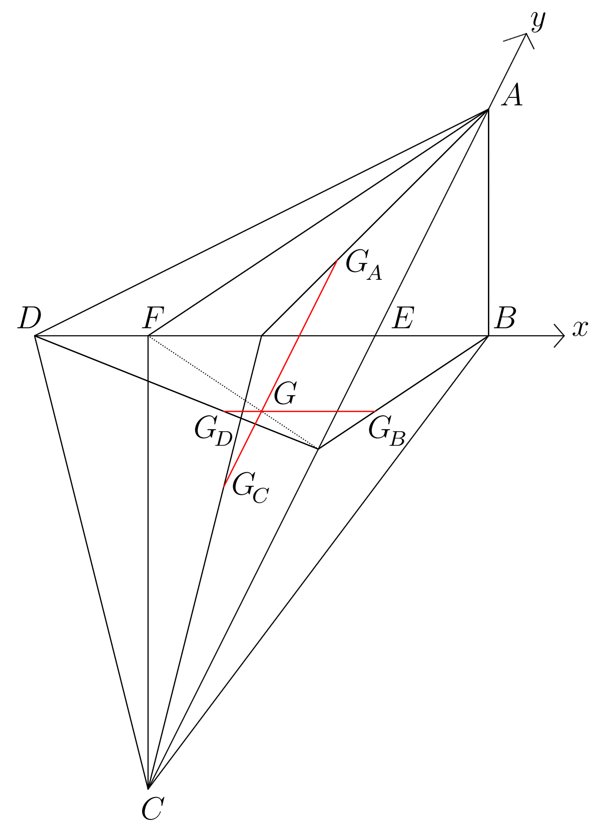
541-1 Centre de gravité d'un quadrilatère plein.



On désigne par G_A, G_B, G_C et G_D les centres de gravité respectifs des triangles ABD, BAC, CBD et DAC. On sait que le centre de gravité G du quadrilatère plein $ABCD$ est l'intersection des droites G_AG_C et G_BG_D.

On considère un système d'axes obliques, avec l'origine en E, l'axe $\overrightarrow{Ex}$ sur $\overrightarrow{EB}$ et l'axe $\overrightarrow{Ey}$ sur $\overrightarrow{EA}$. Alors, on a les coordonnées :

$$A \sim (0,a), \quad B \sim (b,0), \quad C \sim (0,c), \quad D \sim (d,0),$$

et on en déduit

$$G_A \sim \left(\frac{b+d}{3}, \frac{a}{3}\right), \quad G_C \sim \left(\frac{b+d}{3}, \frac{c}{3}\right), \quad G_B \sim \left(\frac{b}{3}, \frac{a+c}{3}\right), \quad G_D \sim \left(\frac{d}{3}, \frac{a+c}{3}\right) \cdot$$

Il en résulte que G a pour coordonnées $G \sim \left(\frac{b+d}{3}, \frac{a+c}{3}\right) \cdot$

D'après la définition de F dans le quadrilatère convexe $ABCD$, on a $\overline{EF} = \overline{ED} + \overline{DF}$; il en résulte que F a pour coordonnées $F \sim (d+b,0)$ et donc le centre de gravité H du triangle ACF a pour coordonnées $H \sim \left(\frac{b+d}{3}, \frac{a+c}{3}\right)$; on a donc bien $H = G$.

Marie-Nicole Gras