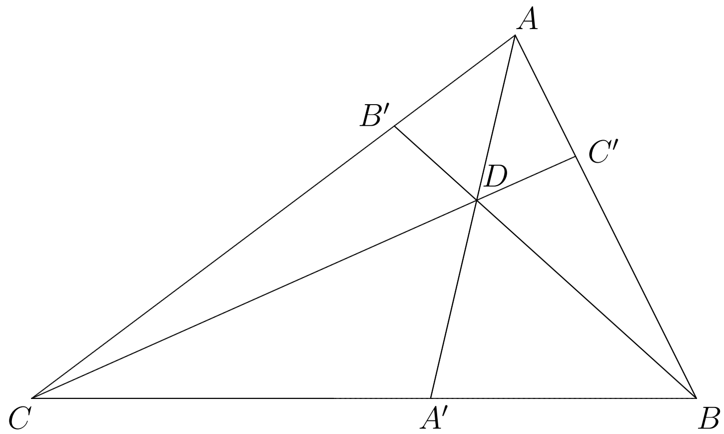
541-2 D'après August Ferdinand Möbius.



D'après le "lemme du chevron", on a

$$\frac{\text{aire}(DAC)}{\text{aire}(DAB)} = \frac{A'C}{A'B}.$$

En effet,

$$\frac{A'C}{A'B} = \frac{\text{aire}(AA'C)}{\text{aire}(AA'B)} = \frac{\text{aire}(DA'C)}{\text{aire}(DA'B)} = \frac{\text{aire}(AA'C) - \text{aire}(DA'C)}{\text{aire}(AA'B) - \text{aire}(DA'C)} = \frac{\text{aire}(DAC)}{\text{aire}(DAB)} = \frac{b}{c}.$$

On a donc obtenu

$$\frac{A'C}{A'B} = \frac{b}{c} \iff \frac{b}{A'C} = \frac{c}{A'B} = \frac{b+c}{BC} \iff \frac{A'C}{BC} = \frac{b}{b+c}.$$

On en déduit (après permutation circulaire de A, B, C) :

$$\frac{A'C}{BC} = \frac{b}{b+c}, \quad \frac{B'A}{CA} = \frac{c}{c+a}, \quad \frac{C'B}{AB} = \frac{a}{a+b},$$

et on a bien la relation de Céva : $A'C \cdot B'A \cdot C'B = A'B \cdot B'C \cdot C'A$.

1. On détermine l'aire p du triangle $AB'C'$; on a

$$p = \frac{1}{2} AB' \cdot AC' \sin(\widehat{CAB}) = \frac{AB' \cdot AC'}{AC \cdot AB} \text{aire}(ABC) = \frac{c}{c+a}\Big(1 - \frac{a}{a+b}\Big)(a+b+c).$$

On obtient (après permutation circulaire de a, b, c pour obtenir q et r) :

$$p = \frac{bc(a+b+c)}{(a+b)(a+c)}, \quad q = \frac{ca(a+b+c)}{(b+a)(b+c)} \text{ et } r = \frac{ab(a+b+c)}{(c+a)(c+b)}.$$

Il en résulte que l'aire x du triangle $A'B'C'$ est égale à

$$\begin{aligned} x &= a+b+c-(p+q+r) \\ &= \frac{a+b+c}{(a+b)(b+c)(c+a)}\Big[(a+b)(b+c)(c+a) - bc(b+c) - ac(a+c) - ab(a+b)\Big] \\ &= \frac{2abc(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}. \end{aligned}$$

2. L'aire x vérifie la relation

$$x^3 + (p+q+r)x^2 = x^2(x+p+q+r) = x^2(a+b+c) = 4pqr\,;$$

En effet $x^2(a+b+c) = \dfrac{4a^2b^2c^2(a+b+c)^3}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2} = 4pqr.$

On a donc bien montré que l'aire x est racine du polynôme du troisième degré

$$f(x) = x^3 + (p+q+r)x^2 - 4pqr.$$

3. On étudie les variations de f ; on a

$$f'(x) = 3x^2 + 2(p+q+r)x = x\big[3x + 2(p+q+r)\big].$$

Donc f' s'annule pour $x = 0$ et $x = \alpha := -\dfrac{2}{3}(p+q+r)$; on a

$$f(\alpha) = -\frac{8}{27}(p+q+r)^3 + \frac{4}{9}(p+q+r)^3 - 4pqr = \frac{4}{27}(p+q+r)^3 - 4pqr \geq 0,$$

car la moyenne arithmétique est supérieure ou égale à la moyenne géométrique, c.-à-d. $\dfrac{p+q+r}{3} \geq \sqrt[3]{pqr}$; on en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha) \geq 0$	$\searrow$	$-4pqr$	$\nearrow$	$+\infty$

Il en résulte que f admet 3 racines réelles, dont une seule est positive. On obtient donc, avec les formules de Cardan, l'expression de x en fonction de p, q, r ; cette expression n'est pas très simple ! on obtient

$$\begin{aligned} x = &-\tfrac{1}{3}(p+q+r) \\ &+ \sqrt[3]{-\tfrac{1}{27}(p+q+r)^3 + 2pqr + i\sqrt{\tfrac{4}{27}pqr\big[(p+q+r)^3 - 27pqr\big]}} \\ &+ \sqrt[3]{-\tfrac{1}{27}(p+q+r)^3 + 2pqr - i\sqrt{\tfrac{4}{27}pqr\big[(p+q+r)^3 - 27pqr\big]}}. \end{aligned}$$

Marie-Nicole Gras