541-3 Factorielles et carrés.

On considère l'équation diophantienne

$$a^2 - b^4 = \frac{p!}{q!}, \quad \text{avec} \ \ p \geq q+2, \quad a, b, p, q \geq 1. \tag{1}$$

On va montrer que cette équation admet une infinité de solutions.

On pose $k = p - q$; alors $k \geq 2$ et (1) s'écrit

$$a^2 = b^4 + (q+1)(q+2)\cdots(q+k)\,; \tag{2}$$

I) L'équation (2) admet des familles infinies de solutions ; en voici trois :

1) On a l'égalité

$$\begin{aligned} 1 + (q+1)(q+2)(q+3)(q+4) &= 1 + (q^2+3q+2)(q^2+7q+12) \\ &= q^4 + 10q^3 + 35q^2 + 50q + 25 \\ &= (q^2+5q+5)^2. \end{aligned}$$

On en déduit, pour tout $q \geq 1$,

$$(q^2+5q+5)^2 - 1^4 = \frac{(q+4)!}{q!}.$$

2) On a l'égalité

$$b^8 - b^4 = (b^4 - 1)b^4.$$

On en déduit, pour $b \geq 2$,

$$(b^4)^2 - b^4 = (b^4-1)b^4 = \frac{(b^4)!}{(b^4-2)!}.$$

3) Si $k = 2$, on cherche a, b, q entiers tels que

$$a^2 - b^4 = (a - b^2)(a + b^2) = (q+1)(q+2).$$

Les entiers $q+1$ et $q+2$ sont de parité différente ; on cherche s'il existe des entiers x tels que

$$a^2 - b^4 = 4x(4x+1) = (2x)(8x+2)\,;$$

on cherche donc x tel que

k' plutôt pour ce paramétrage

$$\begin{cases} a - b^2 &= \quad 2x \\ a + b^2 &= \quad 8x+2 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= \quad 5x+1 \\ b^2 &= \quad 3x+1 \end{cases}.$$

Pour tout entier $k \geq 1$, on pose $x = 3k^2 + 2k$; alors $b^2 = 9k^2 + 6k + 1 = (3k+1)^2$, donc $b = 3k+1$ et $a = 5(3k^2+2k) + 1 = 15k^2 + 10k + 1$, et on a

$$a^2 - b^4 = (12k^2 + 8k)(12k^2 + 8k + 1),$$

et $q = 12k^2 + 8k - 1$.

II) L'équation donnée admet beaucoup d'autres solutions ; en utilisant (2), nous avons obtenu, avec un ordinateur, les résultats suivants :

1) On obtient 771 solutions pour $1 \leq a \leq 25000$; parmi elles, il y a

(i) 386 solutions avec $k = 2$, $\big[$dont 40 de la famille I),3)$\big]$,

(ii) 97 solutions avec $k = 3$,

(iii) 251 solutions avec $k = 4$, $\big[$dont 155 de la famille I),1)$\big]$,

(iv) 36, 12, 12, 7, 4, 1, 1 solutions avec respectivement $k = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$.

2) La liste des 28 solutions avec $1 \leq a \leq 100$ est la suivante :

a	5	6	11	11	16	19	21	26	29	31	35	41	41	44
b	1	2	1	1	2	1	3	4	1	5	5	1	5	4
p	4	5	5	6	16	6	6	21	7	8	25	8	33	8
q	1	3	1	3	14	2	2	19	3	5	23	4	31	4
k	3	2	4	3	2	4	4	2	4	3	2	4	2	4

a	51	53	55	61	64	71	71	76	81	81	86	89	91	96
b	3	5	1	7	2	1	1	8	3	7	4	1	5	6
p	7	14	9	12	17	7	10	8	81	65	85	11	88	11
q	2	11	5	9	14	1	6	4	79	63	83	7	86	7
k	5	3	4	3	3	6	4	4	2	2	2	4	2	4

3) Lorsque a est assez grand, on obtient chaque valeur de $k = p - q$; voici des exemples, pour $2 \leq k \leq 20$:

k	a	b	p	q
2	6	2	5	3
3	5	1	4	1
4	11	1	5	1
5	51	3	7	2
6	71	1	7	1
7	201	3	8	1
8	684	18	9	1
9	2304	36	10	1
10	7911	69	11	1
11	22716	78	12	1
12	220444	266	14	2
13	295344	84	14	1
14	1369424	868	15	1
15	5477696	1736	16	1
16	6582945600	27720	25	9
17	84649536	5256	18	1
18	348800256	2016	19	1
19	1660096000	23840	20	1
20	24285412800	72600	22	2

Marie-Nicole Gras