

541-4 Une curiosité algébrique.

On cherche des réels non nuls x, y, z , tels que

$$x + y + z + \frac{1}{xyz} = xyz + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}. \quad (1)$$

En réduisant au même dénominateur, l'égalité (1) s'écrit

$$\begin{aligned} xyz(x + y + z) + 1 &= x^2y^2z^2 + yz + zx + xy \\ \iff (yz)(zx)(xy) - (zx)(xy) - (xy)(yz) - (yz)(zx) + (yz) + (zx) + (xy) - 1 &= 0 \\ \iff (yz - 1)(zx - 1)(xy - 1) &= 0. \end{aligned}$$

En conclusion, (1) est vérifiée si et seulement si deux des trois réels sont inverses l'un de l'autre.

Marie-Nicole Gras