541-1 Une construction pratique du centre de gravité d'un quadrilatère plein

On choisit un repère orthonormé, d'origine le milieu de [BC], d'axe (Ox) la droite (BD).

On choisit comme unité de longueur BD/2.

Les coordonnées des points sont :

$$B\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.\qquad D\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.\qquad A\left|\begin{matrix}a\\a'\end{matrix}\right.\qquad C\left|\begin{matrix}c\\c'\end{matrix}\right.\qquad \text{avec : }\begin{cases}a'>0\\c'<0\end{cases}$$

L'équation de la droite (AC) est : $(a'-c')\cdot x-(a-c)\cdot y+ac'-ca'=0$

Les points E et F ont pour coordonnées : $E\left|\begin{matrix}-\dfrac{ac'-ca'}{a'-c'}\\0\end{matrix}\right.\qquad F\left|\begin{matrix}\dfrac{ac'-ca'}{a'-c'}\\0\end{matrix}\right.$

Soient G, G_1, G_2, G_3, G_4 les centres de gravité des triangles ACF, AEB, AFD, BEC, DFC.

Leurs coordonnées sont : $G:\ \dfrac{1}{3\cdot(a'-c')}\cdot\left|\begin{matrix}aa'-cc'\\a'^2-c'^2\end{matrix}\right.$

$$G_1:\ \frac{1}{3\cdot(a'-c')}\cdot\left|\begin{matrix}(a+1)\cdot(a'-c')-(ac'-ca')\\a'\cdot(a'-c')\end{matrix}\right.\qquad G_2:\ \frac{1}{3\cdot(a'-c')}\cdot\left|\begin{matrix}(a-1)\cdot(a'-c')+(ac'-ca')\\a'\cdot(a'-c')\end{matrix}\right.$$

$$G_3:\ \frac{1}{3\cdot(a'-c')}\cdot\left|\begin{matrix}(c+1)\cdot(a'-c')-(ac'-ca')\\c'\cdot(a'-c')\end{matrix}\right.\qquad G_4:\ \frac{1}{3\cdot(a'-c')}\cdot\left|\begin{matrix}(c-1)\cdot(a'-c')+(ac'-ca')\\c'\cdot(a'-c')\end{matrix}\right.$$

Le centre de gravité G' de la réunion des plaques entières AEB, AFD, BEC, DFC est le barycentre des points G_1, G_2, G_3, G_4, avec comme coefficients les aires des triangles correspondants.

Comme les bases horizontales de ces quatre triangles ont même longueur, les quatre coefficients sont proportionnels aux hauteurs a', a', $-c'$, $-c'$.

On en déduit les coordonnées de G' : $G':\ \dfrac{1}{3\cdot(a'-c')}\cdot\left|\begin{matrix}aa'-cc'\\a'^2-c'^2\end{matrix}\right.$

Le point G' coïncide avec le point G.

Donc le centre de gravité du quadrilatère ABCD coïncide aussi avec le point G.