541-2 D’après August Ferdinand Möbius

Question 1

On utilise les coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B, C).

On choisit l’aire du triangle ABC comme unité d’aire.

Le point D a comme coordonnées, de somme 1 : $D\left|\begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array}\right.$

Les points A’, B’, C’ ont pour coordonnées, de somme 1 : $A'\left|\begin{array}{c} 0 \\ \dfrac{b}{b+c} \\ \dfrac{c}{b+c} \end{array}\right. \quad B'\left|\begin{array}{c} \dfrac{a}{c+a} \\ 0 \\ \dfrac{c}{c+a} \end{array}\right. \quad C'\left|\begin{array}{c} \dfrac{a}{a+b} \\ \dfrac{b}{a+b} \\ 0 \end{array}\right.$

$$p = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{a}{a+b} & \dfrac{a}{c+a} \\ 0 & \dfrac{b}{a+b} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{c}{c+a} \end{vmatrix} = \frac{bc}{(a+b)\cdot(c+a)}$$

$$q = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dfrac{a}{a+b} \\ 1 & \dfrac{b}{b+c} & \dfrac{b}{a+b} \\ 0 & \dfrac{c}{b+c} & 0 \end{vmatrix} = \frac{ca}{(b+c)\cdot(a+b)}$$

$$q = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{a}{c+a} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{b}{b+c} \\ 1 & \dfrac{c}{c+a} & \dfrac{c}{b+c} \end{vmatrix} = \frac{ab}{(c+a)\cdot(b+c)}$$

$$x = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{a}{c+a} & \dfrac{a}{a+b} \\ \dfrac{b}{b+c} & 0 & \dfrac{b}{a+b} \\ \dfrac{c}{b+c} & \dfrac{c}{c+a} & 0 \end{vmatrix} = \frac{2 \cdot abc}{(c+a)\cdot(b+c)\cdot(a+b)}$$

Question 2

En exprimant x, p, q, r en fonction de a, b, c, on obtient : $x^3 + (p+q+r)\cdot x^2 - 4\cdot pqr = 0$

Question 3

Soit : $f(x) = x^3 + (p+q+r)\cdot x^2 - 4\cdot pqr$

Alors : $f'(x) = x\cdot\left(3\cdot x + 2\cdot(p+q+r)\right)$

La dérivée s'annule en 0 et en $-\dfrac{2}{3}\cdot(p+q+r)$

$$\begin{cases} f(0) = -4\cdot pqr < 0 \\ f\left(-\dfrac{2}{3}\cdot(p+q+r)\right) = \dfrac{4}{27}\cdot\dfrac{(ab+bc+ca)^2\cdot(a^2b+b^2c+c^2a+b^2a+c^2b+a^2c-6abc)}{(a+b)^3\cdot(b+c)^3\cdot(c+a)^3} \end{cases}$$

Soit E le dernier facteur du numérateur de la fraction ci-dessus.

Si l'on démontre que $E \geq 0$, alors le tableau de variation de f indique que f admet une seule racine strictement positive et deux racines strictement négatives (éventuellement confondues).

$$\begin{aligned} E &= (a+b+c)\cdot(ab+bc+ca) - 9abc = ab+bc+ca-9abc \\ &= ab + b\cdot(1-a-b) + a\cdot(1-a-b) - 9ab\cdot(1-a-b) \\ &= 9a^2b + 9ab^2 - 10ab - a^2 - b^2 + a + b \end{aligned}$$

La fonction E de (a, b) est continue sur le compact K défini par : $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ a+b \leq 1 \end{cases}$

Elle atteint donc un minimum et un maximum sur ce compact.

Sur le bord du compact : $\begin{cases} E(0,b) = b \cdot (1-b) \geq 0 \\ E(a,0) = a \cdot (1-a) \geq 0 \\ E(a,1-a) = a \cdot (1-a) \geq 0 \end{cases}$

On cherche les points stationnaires à l'intérieur du compact :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial b} = 18ab + 9b^2 - ab - 2a + 1 = 0 \\ \dfrac{\partial E}{\partial b} = 18ab + 9a^2 - ab - 2b + 1 = 0 \end{cases}$$

Par différence, on obtient : $(b-a) \cdot (9a + 9b - 8) = 0$

Si $b = a$, alors : $\begin{cases} a = b = 1/3 \\ E = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = b = 1/9 \\ E = 8/81 \end{cases}$

Si $a + b = 8/9$, alors : $\begin{cases} a = 7/9 \\ b = 1/9 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 1/9 \\ b = 7/9 \end{cases}$ et $E = 8/81$

Le facteur E est donc bien positif ou nul sur le compact K.