Résoudre dans les entiers naturels :

$$a^2 - b^4 = (p!)/(q!),$$

avec $p>q$ et $(p - q)$ différent de 1.

Solution :

Le rapport entre 2 factorielles, dans ces conditions est nécessairement une série de nombres consécutifs exprimée sous forme de produit. On va utiliser le paramétrage suivant :

$$n(n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4)(n + 5)(n + 6)(n + 7) =$$

$$(n^4 + 14n^3 + 63n^2 + 98n + 28)^2 - (28 + 8n)^2.$$

Il suffit alors de poser $28 + 8n = k^2$ d'où $n = (k^2 - 28)/8$.

Exemple $k = 10$ donc $n = 9$.

On obtient $p = 16$ et $q = 8$ ainsi que $a = 22780$ et $b = 10$.

Ainsi k suit une progression arithmétique de raison 4 et de premier terme 6 définie par $U(o) = 6$ et $U(n) = U(n-1) + 4$.

Autre groupe de solutions (plus facile à trouver) avec b = une constante, ici $b = 1$.

On utilise alors un autre paramétrage :

$$(n^2 + 5n + 5)^2 - 1 = (n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4).$$

Exemple : $n = 2$; $a = 19$; $b = 1$; $p = 6$; $q = 2$.