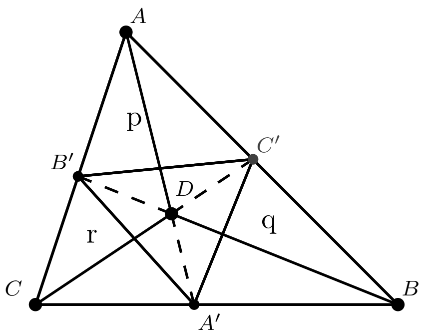
541.2 D'après August Ferdinand Möbius



Soit ABC un triangle quelconque et D un point en son intérieur , DBC , DAC et DAB désignent à la fois les triangles et leurs aires .
On pose $DBC = a, DAC = b$ et $DAB = c$.
A' , B' et C' désignent les points d'intersection des droites (AD) , (BD) et (CD) avec les côtés $[BC]$ $[AC]$, $[AB]$ respectivement .

1. Exprimons les aires des triangles $C'B'A$,$A'C'B$ et $B'A'C$ en fonction de a , b et c.

Les triangles DAB' et $DB'C$ ont la même hauteur issue de D .
et les triangles BAB' et $BB'C$ ont la même hauteur isssue de B .
On déduit les égalités suivantes :
$\dfrac{B'A}{B'C} = \dfrac{DB'A}{DB'C} = \dfrac{BAB'}{BB'C} = \dfrac{DAB}{DBC} = \dfrac{c}{a}$ donc $\dfrac{B'A}{B'C} = \dfrac{c}{a}$
on déduit alors que B' est le barycentre des points (A, a) et (C, c) donc $\overrightarrow{AB'} = \dfrac{c}{a+c}\overrightarrow{AC}$
de même en utilisant les triangles DAC' et $DC'B$ et les triangles CAC' et $CC'B$,
on obtient que C' est le barycentre des points (A, a) et (B, b) donc $\overrightarrow{AC'} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.

$\text{dét}(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC'}) = \dfrac{c}{a+c} \times \dfrac{b}{a+b}\ \text{dét}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
$C'B'A = \frac{1}{2}$ dét $(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC'}) = \dfrac{c}{a+c} \times \dfrac{b}{a+b} \times \dfrac{1}{2}$ dét $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ dét$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{c}{a+c} \times \dfrac{b}{a+b}ABC$
Comme $ABC = DAB + DBC + DCA = a + b + c$
on obtient : $C'B'A = \dfrac{bc}{(a+b)(a+c)}(a+b+c) = p$

De la même façon , on obtient : $A'C'B = \dfrac{ac}{(b+c)(b+a)}(a+b+c) = q$ et

$$B'A'C = \frac{ab}{(c+a)(c+b)}(a+b+c) = r$$

2. Soit x l'aire du triangle $A'B'C'$
$x = ABC - (C'B'A + A'C'B + B'A'C)$
$x = DBC + DAC + DAB) - (C'B'A + A'C'B + B'A'C) = a + b + c - (p + q + r)$
$x = a + b + c - (\dfrac{bc}{(a+b)(a+c)}(a+b+c) + \dfrac{ac}{(b+c)(b+a)}(a+b+c) + \dfrac{ab}{(c+a)(c+b)}(a+b+c)$
$x = (a+b+c)\left(1 - \dfrac{bc}{(a+b)(a+c)} + \dfrac{ac}{(b+c)(b+a)} + \dfrac{ab}{(c+a)(c+b)}\right)$
$x = (a+b+c)\left(\dfrac{(a+b)(a+c)(b+c) - bc(b+c) - ac(a+c) - ab(a+b)}{(a+b)(a+c)(b+c)}\right)$
$x = \dfrac{2abc(a+b+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)} \quad x^3 = \dfrac{8a^3b^3c^3(a+b+c)^3}{((a+b)(a+c)(b+c))^3}$

Déterminons $x^3 + (p+q+r)x^2$ en fonction a , b et c .

$$p+q+r = \frac{bc}{(a+b)(a+c)}(a+b+c) = \frac{ac}{(b+c)(b+a)}(a+b+c) = \frac{ab}{(c+a)(c+b)}(a+b+c)$$

$$= \left(\frac{bc(b+c)+ac(a+c)+ab(a+b)}{(a+b)(a+c)(b+c)}\right)(a+b+c) \quad = \frac{(a+b)(a+c)(b+c)-2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}(a+b+c)$$

$$(p+q+r)x^2 = 4a^2b^2c^2\frac{\left[(a+b)(a+c)(b+c)-2abc\right](a+b+c)^3}{\left[(a+b)(a+c)(b+c)\right]^3}$$

$$x^3+(p+q+r)x^2 = \frac{(a+b+c)^3}{\left[(a+b+(a+c)(b+c)\right]^3}\left[8a^3b^3c^3 + 4a^2b^2c^2\left[(a+b)(a+c)(b+c)-2abc\right]\right]$$

$$= \frac{(a+b+c)^3}{\left[(a+b)(a+c)(b+c)\right]^3}\left[8a^3b^3c^3 + 4a^2b^2c^2(a+b)(a+c)(b+c) - 8a^3b^3c^3\right]$$

$$= \frac{4a^2b^2c^2(a+b)(a+c)(b+c)}{\left[(a+b)(a+c)(b+c)\right]^3}(a+b+c)^3 = \frac{4a^2b^2c^2}{\left[(a+b)(a+c)(b+c)\right]^2}(a+b+c)^3$$

Déterminons pqr en fonction de a , b et c .

$$4pqr = 4\frac{bc}{(a+b)(a+c)}(a+b+c) \times \frac{ac}{(b+c)(b+a)}(a+b+c) \times \frac{ab}{(c+a)(c+b)}(a+b+c)$$

$$4pqr = \frac{4a^2b^2c^2}{\left[(a+b)(a+c)(b+c)\right]^2}(a+b+c)^3$$

donc $x^3+(p+q+r)x^2 = 4pqr \Leftrightarrow x^3+(p+q+r)x^2 - 4pqr = 0$

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + (p+q+r)x^2 - 4pqr$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'(x) = 3x^2 + 2(p+q+r)x = x(3x+2(p+q+r))$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\dfrac{2}{3}(p+q+r) = x_1$ on remarque que $x_1 < 0$

On a le tableau de variation :

x	$-\infty$		x_1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1$	$\searrow$	$f(0) = -4pqr$	$\nearrow$	$+\infty$

$x_1 = -\dfrac{2}{3}(p+q+r) < 0$

$f(x_1 = \left(-\dfrac{2}{3}(p+q+r)\right)^3 + (p+q+r)\left(-\dfrac{2}{3}(p+q+r)\right)^2 - 4pqr$

$= -\dfrac{8}{27}\left((p+q+r)\right)^3 + \dfrac{4}{9}(p+q+r)^3 - 4pqr$

$= \dfrac{4}{27}\left((p+q+r)\right)^3 - 4pqr$

$= 4\left(\dfrac{1}{27}\left((p+q+r)\right)^3 - pqr\right)$

On sait que la moyenne arithmétique est supérieure à la moyenne géométrique , et il y a égalité lorsque les nombres sont égaux.

on a :

$\dfrac{p+q+r}{3} > (pqr)^{\frac{1}{3}}$ si p , q , r ne sont pas tous égaux donc $\dfrac{(p+q+r)^3}{27} > pqr$.

On déduit que $f(x_1) > 0$.

De plus $f(0) < 0$ alors en utilisant que f est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires sur chacun des intervalles $]-\infty; x_1]$, $]x_1; 0]$ et $]0; +\infty]$ démontre que l'équation $x^3 + (p+q+r)x^2 - 4pqr = 0$ admet trois racines réelles dont une positive.

• Si $p = q = r$ alors $f'(x) = x(3x+6p) = 3x(x+2p)$
dans ce cas $x_1 = -2p < 0$ et $f(x_1) = (-2p)^3 + 3p(-2p)^2 - 4p^3 = -8p^3 + 12p^3 - 4p^3 = 0$
l'équation admet 1 racine réelle double négative et une positive.
dans ce cas le point D est le centre de gravité du triangle car
l'égalité $p = q = r \Leftrightarrow a = b = c$