Exercice 534-3

Dans un repère orthonormé on note $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(b,c,a)$

On a $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ et $\vec{u}.\vec{v} = ab+bc+ca$

or $\vec{u}.\vec{v} = ab+bc+ca = \|\vec{u}\|^2 \times \cos\alpha$ or $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ donc $-\|\vec{u}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \cos\alpha \leq \|\vec{u}\|^2$

Donc $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$.

Pour avoir $ab+bc+ca = a^2+b^2+c^2$, il faut que le produit scalaire soit maximal. On a alors $\cos\alpha = 1$ c'est à dire les deux vecteurs sont colinéaires et de même sens. Or les deux vecteurs ont déjà même norme donc ils sont égaux. On a alors le système $\begin{cases} a=b \\ b=c \\ c=a \end{cases}$ donc $a=b=c$.

Autre démonstration

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \geq 0$ donc $a^2+b^2 \geq 2ab$. De même $a^2+c^2 \geq 2ac$ et $b^2+c^2 \geq 2bc$.

En additionnant membre à membre les trois inégalités on a

$a^2+b^2+a^2+c^2+b^2+c^2 \geq 2ab+2ac+2bc$

soit $2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+ac+bc)$ donc $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$

Supposons que a, b et c ne soit pas tous égaux donc on peut supposer en toute généralité $a<b$ alors $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 > 0$ donc $a^2+b^2 > 2ab$ .et comme précédemment

$a^2+b^2+a^2+c^2+b^2+c^2 > 2ab+2ac+2bc$

soit $2(a^2+b^2+c^2) > 2(ab+ac+bc)$ donc $a^2+b^2+c^2 > ab+ac+bc$

Evidemment si $a=b=c$ alors $a^2+b^2+c^2 = ab+ac+bc = 3a^2$

Donc on a bien $a^2+b^2+c^2 = ab+ac+bc$ si et seulement si $a=b=c$