Exercice 534 4

On va faire une démonstration analytique dans un repère orthonormé d'origine O.

On place les points $A(1;\sqrt{3})$, $B(1;-\sqrt{3})$ et $B(-2;0)$ formant un triangle équilatéral dans le cercle de centre O et de rayon 2.

On pose $M(\rho\cos\theta;\rho\sin\theta)$

On va limiter l'étude dans l'angle $A\hat{O}B$, donc $\rho \geq 0$ et $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$. Dans cet angle on a $MC \geq MA$ et $MC \geq MB$. On va montrer que $MA + MB \geq MC$.

$$MA + MB - MC = (MA + MB - MC)\times\frac{MA + MB + MC}{MA + MB + MC} = \frac{(MA + MB - MC)\times(MA + MB + MC)}{MA + MB + MC}$$

$$MA + MB - MC = \frac{(MA + MB)^2 - MC^2}{MA + MB + MC} = \frac{MA^2 + MB^2 - MC^2 + 2MA\times MB}{MA + MB + MC}$$

Comme $MA + MB + MC > 0$ donc on va étudier le signe de $MA^2 + MB^2 - MC^2 + 2MA\times MB$

$\overrightarrow{AM}(\rho\cos\theta - 1;\rho\sin\theta - \sqrt{3})$

$\overrightarrow{BM}(\rho\cos\theta - 1;\rho\sin\theta + \sqrt{3})$

$\overrightarrow{CM}(\rho\cos\theta + 2;\rho\sin\theta)$

$AM^2 = (\rho\cos\theta - 1)^2 + (\rho\sin\theta - \sqrt{3})^2 = \rho^2\cos^2\theta - 2\rho\cos\theta + 1 + \rho^2\sin^2\theta - 2\rho\sqrt{3}\sin\theta + 3$

$AM^2 = \rho^2 - 2\rho\cos\theta - 2\rho\sqrt{3}\sin\theta + 4$

$BM^2 = \rho^2 - 2\rho\cos\theta + 2\rho\sqrt{3}\sin\theta + 4$

$CM^2 = (\rho\cos\theta + 2)^2 + (\rho\sin\theta)^2 = \rho^2\cos^2\theta + 4\rho\cos\theta + 4 + \rho^2\sin^2\theta = \rho^2 + 4\rho\cos\theta + 4$

$AM^2 + BM^2 - CM^2 = \rho^2 - 8\rho\cos\theta + 4$ et

$2AM\times BM = 2\sqrt{(\rho^2 - 2\rho\cos\theta - 2\rho\sqrt{3}\sin\theta + 4)(\rho^2 - 2\rho\cos\theta + 2\rho\sqrt{3}\sin\theta + 4)}$

$2AM\times BM = 2\sqrt{(\rho^2 - 2\rho\cos\theta + 4)^2 - (2\rho\sqrt{3}\sin\theta)^2} = 2\sqrt{\rho^4 - 4\rho^3\cos\theta + 16\rho^2\cos^2\theta - 4\rho^2 - 16\cos\theta + 16}$

$2AM\times BM = \sqrt{4\rho^4 - 16\rho^3\cos\theta + 64\rho^2\cos^2\theta - 16\rho^2 - 64\cos\theta + 64}$

$2AM\times BM = \sqrt{(\rho^2 - 8\rho\cos\theta + 4)^2 + 3(\rho^2 - 4)^2}$ ***

Lorsque $MA^2 + MB^2 - MC^2 = \rho^2 - 8\rho\cos\theta + 4 \geq 0$, $MA^2 + MB^2 - MC^2 + 2MA\times MB \geq 0$

On regarde le signe de $\rho^2 - 8\rho\cos\theta + 4$

$\Delta' = 16\cos^2\theta - 4$

Comme $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$, $\frac{1}{2} \leq \cos\theta \leq 1$ et $\frac{1}{4} \leq \cos^2\theta \leq 1$, ainsi $0 \leq 16\cos^2\theta - 4 \leq 12$

Donc $\rho^2 - 8\rho\cos\theta + 4$ a deux racines $\rho_1 = 4\cos\theta - \sqrt{16\cos^2\theta - 4} = \frac{4}{4\cos\theta + \sqrt{16\cos^2\theta - 4}}$ et

$\rho_2 = 4\cos\theta + \sqrt{16\cos^2\theta - 4}$.

On a $2 \leq 4\cos\theta \leq 4$ et $0 \leq \sqrt{16\cos^2\theta - 4} \leq 2\sqrt{3}$ donc $2 \leq \rho_2 \leq 4 + 2\sqrt{3}$ et $\frac{1}{4 + 2\sqrt{3}} \leq \frac{1}{\rho_2} \leq \frac{1}{2}$ donc

$\frac{4}{4 + 2\sqrt{3}} \leq \rho_1 \leq 2$

Donc pour tout $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ et $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$ alors $\rho^2 - 8\rho\cos\theta + 4 \leq 0$ et

$(\rho^2 - 8\rho\cos\theta + 4)^2 + 3(\rho^2 - 4)^2 \geq (\rho^2 - 8\rho\cos\theta + 4)^2$

Donc $\sqrt{(\rho^2 - 8\rho\cos\theta + 4)^2 + 3(\rho^2 - 4)^2} \geq \sqrt{(\rho^2 - 8\rho\cos\theta + 4)^2}$

soit $\sqrt{(\rho^2 - 8\rho\, cos\,\theta + 4)^2 + 3(\rho^2 - 4)^2} \geq -(\rho^2 - 8\rho\, cos\,\theta + 4)$

Donc $\rho^2 - 8\rho\, cos\,\theta + 4 + \sqrt{(\rho^2 - 8\rho\, cos\,\theta + 4)^2 + 3(\rho^2 - 4)^2} \geq \rho^2 - 8\rho\, cos\,\theta + 4 - (\rho^2 - 8\rho\, cos\,\theta + 4)$

A nouveau $MA^2 + MB^2 - MC^2 + 2MA \times MB \geq 0$ et $MA + MB - MC \geq 0$

Dans le cas où M est sur le cercle de centre O et de rayon 2, $\rho = 2$, $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$, $\rho^2 - 4 = 0$ et $MA^2 + MB^2 - MC^2 + 2MA \times MB = 0$. Donc $MA + MB - MC \geq 0$, c'est le cas où les longueurs forment un triangle aplati.

Détail de ***

$(\rho^2 - 8\rho\, cos\,\theta + 4)^2 + 3(\rho^2 - 4)^2 = \rho^4 + 64\rho^2 cos^2\theta + 16 - 16\rho^3 cos\,\theta + 8\rho^2 - 64\rho\, cos\,\theta + 3(\rho^4 - 8\rho^2 + 16)$

$(\rho^2 - 8\rho\, cos\,\theta + 4)^2 + 3(\rho^2 - 4)^2 = \rho^4 + 64\rho^2 cos^2\theta + 16 - 16\rho^3 cos\,\theta + 8\rho^2 - 64\rho\, cos\,\theta + 3\rho^4 - 24\rho^2 + 48$

$(\rho^2 - 8\rho\, cos\,\theta + 4)^2 + 3(\rho^2 - 4)^2 = 4\rho^4 - 16\rho^3 cos\,\theta + 64\rho^2 cos^2\theta - 16\rho^2 - 64\, cos\,\theta + 64$