Solution au problème 532-2 de Stéphane Magnan

Un nombre est bon si on peut l'écrire comme une somme d'entiers dont la somme des inverses vaut 1.

2019 est-il bon ?

Propriété 1 : Si N est bon alors 2N + 2 est bon.

Preuve :

Si N = $\sum_{i=1}^{k} n_i$ et $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} = 1$ alors 2N + 2 $= 2 + \sum_{i=1}^{k} 2n_i$ et $\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2n_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} = 1$

Propriété 2 : si N est bon alors 9 + 2N est bon.

Preuve :

Si N = $\sum_{i=1}^{k} n_i$ et $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} = 1$ alors 9 + 2N = 3 + 6 + $\sum_{i=1}^{k} 2n_i$ et $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2n_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} = 1$

On cherche à « descendre » depuis 2019 jusqu'à trouver nombre bon petit

2019 = 2×1005+9
1005 = 2×498 + 9
498 = 2×248 + 2
248 = 2×123 + 2
123 = 2×57 + 9
57 = 2×24 + 9
24 = 2×11 + 2

Or 11 est bon car 11 = 2 + 3 + 6 et 1/2+1/3+1/6 = 1 donc 2019 est aussi bon.

On remonte maintenant dans l'autre sens depuis 11.

11 = 2 + 3 + 6

24 = 2 + 2×(2 +3 + 6) = 2 + 4 + 6 + 12

57 = 3 + 6 + 2×(2 + 4 + 6 + 12) = 3 + 6 + 4 + 8 + 12 + 24

123 = 3 + 6 + 2×(3 + 6 + 4 + 8 + 12 + 24) = 3 + 6 + 6 + 12 + 8 + 16 + 24 + 48

248 = 2 + 2×(3 + 6 + 6 + 12 + 8 + 16 + 24 + 48) = 2 + 6 + 12 + 12 + 24 + 16 + 32 + 48 + 96

498 = 2 + 2×(2 + 6 + 12 + 12 + 24 + 16 + 32 + 48 + 96)

= 2 + 4 + 12 + 24 + 24 + 48 + 32 + 64 + 96 + 192

1005 = 3 + 6 + 2×(2 + 4 + 12 + 24 + 24 + 48 + 32 + 64 + 96 + 192)

= 3 + 6 + 4 + 8 + 24 + 48 + 48 + 96 + 64 + 128 + 192 + 384

Finalement

2019 = 3 + 6 + 2×(3 + 6 + 4 + 8 + 24 + 48 + 48 + 96 + 64 + 128 + 192 + 384)

= 3 + 6 + 6 + 12 + 8 + 16 + 48 + 96 + 96 + 192 + 128 + 256 + 384 + 768

et la somme des inverses vaut 1.