Exercice 534-2

$$f(x)=x+\left[1-E\left(\frac{1}{1+E(e^x)}\right)\right]\times E\left(\frac{1}{1+D(x)}\right)$$

On partage le travail en trois cas

Premier cas

Si $x<0$ alors $0<e^x<1$ et $E(e^x)=0$ donc

$$f(x)=x+\left[1-E\left(\frac{1}{1+0}\right)\right]\times E\left(\frac{1}{1+D(x)}\right)=x+(1-1)\times E\left(\frac{1}{1+D(x)}\right)=x$$

f est donc une bijection de $]-\infty;0[$ sur lui même.

Si x=0

$$f(0)=0+\left[1-E\left(\frac{1}{1+E(e^0)}\right)\right]\times E\left(\frac{1}{1+D(0)}\right)=0+\left[1-E\left(\frac{1}{1+1}\right)\right]\times E\left(\frac{1}{1+0}\right)=0+(1-0)\times 1=1$$

Deuxième cas

Si $x=n$ est un entier naturel alors $f(n)=n+\left[1-E\left(\frac{1}{1+E(e^n)}\right)\right]\times E\left(\frac{1}{1+D(n)}\right)$

$n\geq 0$ donc alors $e^n\geq 1$ et $E(e^x)\geq 1$ donc $1+E(e^x)\geq 2$ et $0<\frac{1}{1+E(e^n)}\leq\frac{1}{2}$

Comme n est un entier naturel $D(n)=0$.

Avec ces informations $f(n)=n+\left[1-E\left(\frac{1}{1+E(e^n)}\right)\right]\times E\left(\frac{1}{1+D(n)}\right)=n+(1-0)\times E\left(\frac{1}{1}\right)=n+1\times 1=n+1$

Troisième cas

Pour les réels positifs non entier

Si x est un réel positif non entier alors il existe un entier n tel que $0\leq n<x<n+1$

On a alors $e^x>1$ et $1+E(e^x)>2$ donc $0<\frac{1}{1+E(e^n)}<\frac{1}{2}$ et $E\left(\frac{1}{1+E(e^n)}\right)=0$.

De plus $D(x)=x-n>0$ donc $1+D(x)=1+x-n>1$ et $0<\frac{1}{1+D(x)}<1$ donc $E\left(\frac{1}{1+D(x)}\right)=0$

On a donc $f(x)=x+\left[1-E\left(\frac{1}{1+E(e^x)}\right)\right]\times E\left(\frac{1}{1+D(x)}\right)=x+(1-0)\times 0=x$

Résumé

$f(x)=x+1$ si x est un entier naturel et $f(x)=x$ sinon

Pour $x\neq 0$ posons $g(x)=x-1$ si x est un entier naturel non nul et $g(x)=x$ sinon

Si x est un entier naturel alors $g(f(x))=g(x+1)=x$, sinon $g(f(x))=g(x)=x$

Pour $x\neq 0$ si x est un entier naturel non nul alors $f(g(x))=f(x-1)=x-1+1=x$ sinon $f(g(x))=f(x)=x$

f est bien bijective et $f^{-1}=g$