AFDM Exercice 543-1

Patrick David (david@ensea.fr), Julien Sautier (sautier.julien@orange.fr)

Avril 2022

Énoncé de l'exercice.

Soit un triangle non aplati quelconque (ABC) d'aire S. On considère la parabole $\mathcal{P}_1$ tangente en B à (AB) et en C à (AC), puis la parabole $\mathcal{P}_2$ tangente en C à (BC) et en A à (BA), puis la parabole $\mathcal{P}_3$ tangente en C à (BC) et en A à (BA). Les côtés du triangle et les trois paraboles délimitent 7 régions dans le triangle. Déterminer les rapports des aires de ces régions à S.

Solution.

1. On peut facilement calculer les rapports d'aires dans le cas ou le triangle est équilatéral. On se place dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé.

   (a) Par des rotations et des homothéties qui conservent les rapports d'aires, on peut se ramener au cas du triangle inscrit dans le cercle trigonométrique de sommets (A, B, C) d'affixes respectifs $(e^{\frac{\pi\imath}{2}}, e^{\frac{7\pi\imath}{6}}, e^{\frac{11\pi\imath}{6}})$, et donc de coordonnées cartésiennes :
   $((0,1), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right))$
   La longueur des côtés est $\sqrt{3}$, sa hauteur $\frac{3}{2}$ et son aire $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

   (b) Pour des raisons de symétrie et par un calcul simple, l'équation de la parabole $\mathcal{P}_1$ tangente en B à(AB) et en C à(AC) est $y = -x^2 + \frac{1}{4}$. Sa représentation paramétrique complexe de paramètre réel t est

   $$z = t + \left(-t^2 + \frac{1}{4}\right)\imath \qquad (\mathcal{P}_1)$$

   (c) Par multiplication de la représentation paramétrique complexe de $\mathcal{P}_1$ par respectivement $e^{\frac{2\pi\imath}{3}}$ et $e^{\frac{-2\pi\imath}{3}}$ on trouve les représentations paramétriques complexes de $\mathcal{P}_3$ tangente en A à (CA) et en B à(CB). Ce sont :

   $$z = \left(\frac{\sqrt{3}t^2}{2} - \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) + \left(\frac{t^2}{2} + \frac{\sqrt{3}t}{2} - \frac{1}{8}\right)\imath \qquad (\mathcal{P}_2)$$

   et

   $$z = \left(\frac{-\sqrt{3}t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) + \left(\frac{t^2}{2} - \frac{\sqrt{3}t}{2} - \frac{1}{8}\right)\imath \qquad (\mathcal{P}_3)$$

   (d) Soient $\{P, A\} = \mathcal{P}_2 \bigcap \mathcal{P}_3$. Comme $\mathcal{P}_2$ et $\bigcap \mathcal{P}_3$ sont symétriques par rapport à (Oy), on a aussi $\{A, P\} = \mathcal{P}_2 \bigcap (Oy)$. On a donc les ordonnées de $\{A, P\}$ telles que :

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}t^2}{2} - \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} = 0 \\ \frac{t^2}{2} + \frac{\sqrt{3}t}{2} - \frac{1}{8} = y \end{cases}$$

On trouve $t \in \left\{-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ et donc $y \in \left\{-\frac{1}{3}, 1\right\}$. Donc $P\left(0, -\frac{1}{3}\right)$.

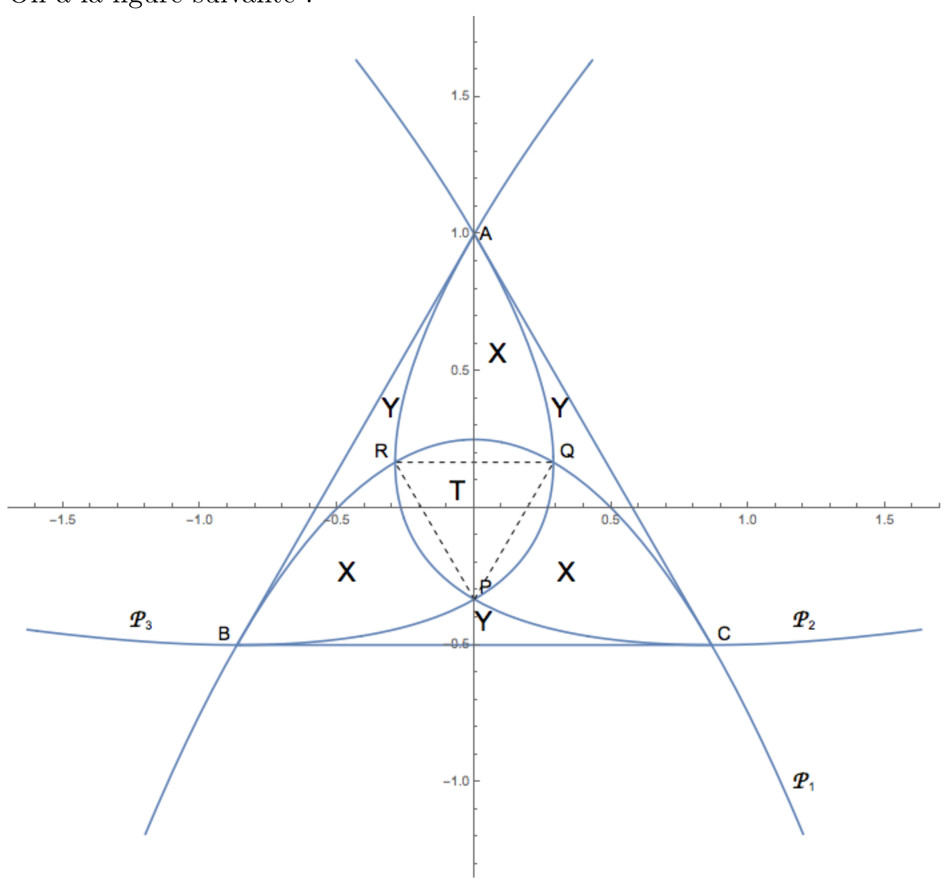
Par rotation de centre O et d'angles de mesures $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{-2\pi}{3}$, on trouve $Q\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{6}\right)$ et $R\left(\frac{-\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{6}\right)$

(e) Aire du "triangle curviligne" (PQR). L'aire du triangle équilatéral "rectiligne" de côté de longueur $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et de hauteur $\frac{1}{2}$ est $T_0 = \frac{\sqrt{3}}{12}$. Pour le "triangle curviligne" (PQR) il faut ajouter l'aire des trois "lunules". L'aire de chacune d'elle est l'aire située au-dessus de (QR) et en dessous de $\mathcal{P}_1$. Elle vaut :

$$lu = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{6}}^{+\frac{\sqrt{3}}{6}} \left(-x^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) dx = \frac{\sqrt{3}}{54}$$

L'aire du triangle curviligne (PQR) est donc $T = T_0 + 3lu = \frac{5\sqrt{3}}{36}$. Le rapport de cette aire à l'aire de (ABC) est $\frac{T}{S} = \frac{5}{27}$.

(f) On a la figure suivante :



(g) Aire des autres triangles curvilignes. Posons X l'aire commune des triangles curvilignes (AQR), (BRP), (CPQ), et Y l'aire commune des triangles curvilignes (ABR), (BCP), (CAQ). Notons aussi W l'aire située entre (BC) et $\mathcal{P}_1$.

$$W = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{+\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(-x^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On a donc :

$$\left\{\begin{array}{l} 3X+3Y+T=S \\ 2X+\quad Y+T=W \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3X+3Y=\frac{11\sqrt{3}}{18} \\ 2X+Y=\frac{13\sqrt{3}}{36} \end{array}\right.$$

On trouve $(X,Y)=\left(\frac{17\sqrt{3}}{108},\frac{5\sqrt{3}}{108}\right)$. On remarque que $T=3Y$.

(h) Les rapports d'aires demandés, dans le cas d'un triangle équilatéral sont donc : $\frac{T}{S}=\frac{5}{27}$, $\quad \frac{X}{S}=\frac{17}{81}$, $\quad \frac{Y}{S}=\frac{5}{81}$

2. Pour passer au cas général, il suffit de montrer que l'on peut transformer par une transformation affine convenable tout triangle quelconque en un triangle équilatéral, à condition de conserver les propriétés utilisées, c'est-à-dire les aires, les paraboles, les tangences.

   (a) Transvection dans un plan affine euclidien

   Théorème 1: Rappel :Une bijection affine :
   1. Conserve les alignements.
   2. Conserve la tangence de deux courbes.
   3. Conserve les rapports d'aires.
   4. Conserve les coniques ainsi que les classes de coniques (Paraboles, ellipses, dégénérées...).

   (b) **Définition:** Une transvection plane f ayant pour base une droite (D) est une bijection affine telle que :
   1. Les points de (D) sont invariants.
   2. Pour tout point M, si $M'=f(M)$, alors $(MM')\parallel(D)$

   Proposition 2: Rappel :Une transvection affine
   1. Conserve les aires.
   2. Est entièrement définie par son axe et un point en dehors de son axe et son image.

   (c) **Proposition 3:** Soit un triangle non aplati (UVW) quelconque. On peut déterminer deux transvections f et g telles que l'image de (UVW) par $g\circ f$ soit un triangle équilatéral de même aire que (UVW).

   Démonstration: On peut supposer que $VW=\max(UV,VW,WU)$. Soit S l'aire du triangle (UVW), et $\ell=\frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$ la longueur du côté d'un triangle équilatéral d'aire S. On a aussi $S=\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$
   1. Comme $VW=\max(UV,VW,WU)$, $d(U,(VW))<\ell$.
   2. Le cercle de centre V et de rayon ℓ coupe la droite passant par U et parallèle à (VW) en deux points U' et U''. Soit f la transvection de base (VW) telle que $f(U)=U'$. f transforme le triangle (UVW) en $(U'VW)$ de même aire S et avec $U'V=\ell$.
   3. Soit W' l'intersection de la médiatrice de $[U'V]$ et de la parallèle à $(U'V)$ passant par W. Soit g la transvection de base $(U'V)$ telle que $g(W)=W'$
   4. Le triangle $(U'VW')$ image de (UVW) par $g\circ f$ est équilatéral. En effet par construction $W'U'=W'V$ et l'aire de $(U'VW')$ est S. Comme $U'V=\ell$, $d(W',(U'V))=\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ et $W'U'=W'V=\ell$.

(d) Les aires délimitées dans le triangle (UVV) par les trois paraboles tangentes sont égales aux aires correspondantes dans le triangle équilatéral $(U'VW')$. Les rapports de ces aires sont donc les mêmes que ceux trouvés pour le triangle (ABC) de la première partie, soit $\frac{T}{S} = \frac{5}{27}, \quad \frac{X}{S} = \frac{17}{81}, \quad \frac{Y}{S} = \frac{5}{81}$.

3. Remarque.

   La transformation par deux transvections d'un triangle non aplati en triangle équilatéral permet de traiter aussi des exercices similaires dans lesquels les propriétés utilisées sont conservées par transvection.
   Par exemple, on peut montrer que dans tout triangle non aplati (UVW), il existe une unique ellipse tangente à chacun des côtés du triangle en leur milieu. Elle est appelée ellipse de Steiner du triangle.
   L'ellipse de Steiner d'un triangle équilatéral est le cercle inscrit. En posant ici S l'aire du triangle (UVW) et St l'aire de son ellipse de Steiner, on a $\frac{St}{S} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$, puisque pour un triangle équilatéral de côté 1, $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$ et le rayon du cercle inscrit est $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$.