Proposition de problème : Archimède, encore.

Sont donnés trois points A, B, C non alignés d'un plan affine euclidien.

1) démontrer qu'il existe une et une seule parabole P(A ; B, C) tangente en B à (AB) et en C à (AC). (Figure 1)

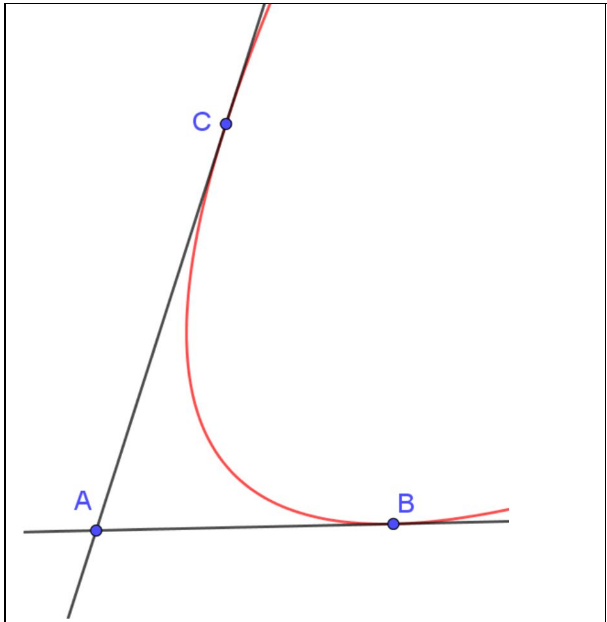


Figure 1

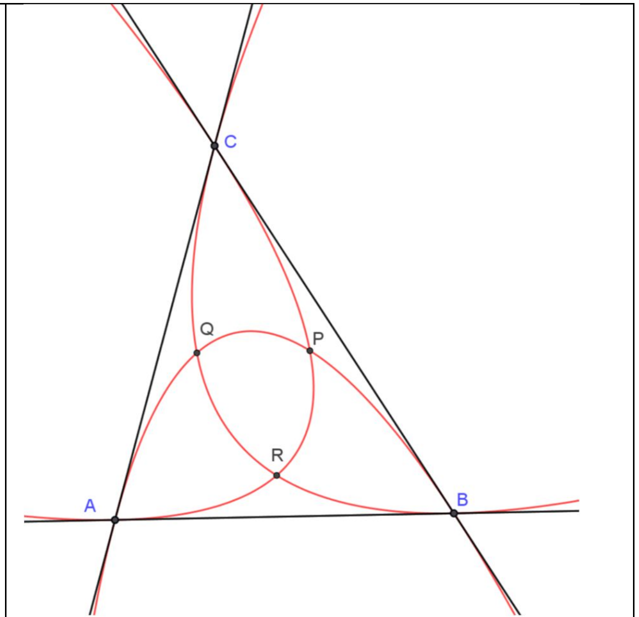
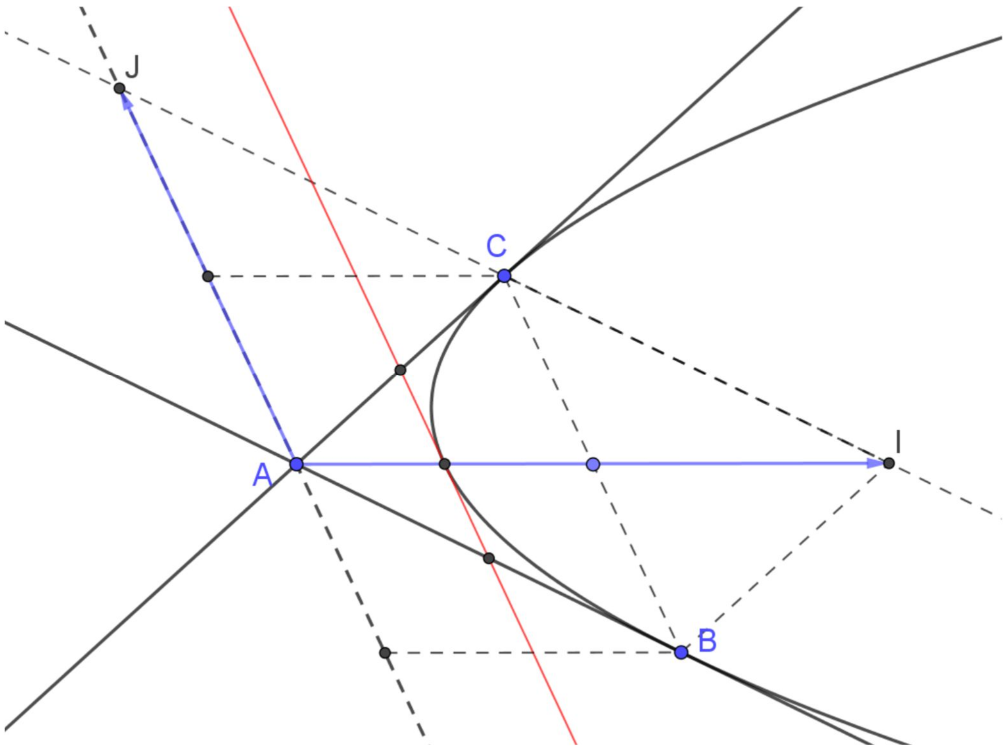


Figure 2

On construit les trois paraboles P(A ; B, C), P(B ; C, A), P(C ; A, B) où les rôles des points A, B, C sont permutés, et qui se coupent deux à deux en trois points P, Q, R, délimitant sept surfaces curvilignes à l'intérieur du triangle A, B , C. (Figure 2). Déterminer l'aire de chacune de ces surfaces en fonction de l'aire du triangle ABC.

Éléments de solution



1) Construisons le parallélogramme ABIC et plaçons nous dans le repère affine (A, AI, AJ, où (AI) est une diagonale et (AJ) parallèle à l'autre diagonale. S'il existe une parabole tangente à (AB) en B et à (AC) en C, elle aura pour diamètre [BC] de milieu le centre du parallélogramme. Son équation sera donc de la forme

$$X = aY^2 + bY + c.$$

Elle passe par B(1/2 ,-1/2)) et par C(1/2 , 1 /2), d'où l'on déduit b = 0. Elle passe aussi par le point (0, ¼)

Elle coupe l’axe (AI) en un point de coordonnées (0, ¼). D’où l’on déduit a = 1 et c = ¼. Au total $X = Y^2 + \frac{1}{4}$. qui vérifie toutes les propriétés souhaitées et qui est la seule dans ce cas.

2) Archimède a réalisé la quadrature de la parabole en se basant sur la figure suivante (Figure 3).

Il y démontre que l’aire du segment de parabole BPC est égale aux 4/3 de l’aire du triangle BPC (et de même l’aire du segment de parabole BSP est égale aux 4/3 de l’aire du triangle BSP etc.)

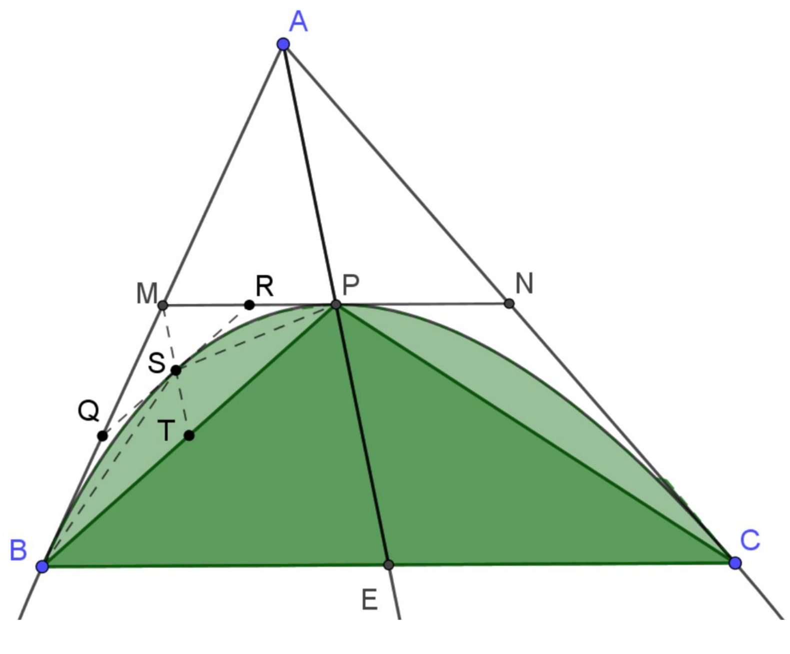


Figure 3

:

Cette propriété nous suffit pour déterminer les aires des différentes parcelles délimitées par les trois arcs de parabole.

Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Nous avons intérêt à utiliser le repère affine (A, AB, AC). Les médianes du triangle ABC définissent trois symétries obliques, par rapport à (AG) – direction (BC), par rapport à (BG) direction (AC), par rapport à (CG) direction (AB). Les trois paraboles sont ainsi symétriques deux à deux.

Leur équation relativement au repère affine (A, AB, AC) sont, pour $\overparen{BRQC}$: $(x-y)^2 - 2(x+y) + 1 = 0$

pour $\overparen{ARPC}$: $(2y+x)^2 - 4y = 0$

pour $\overparen{AQPB}$: $(2x+y)^2 - 4x = 0$

ce qui permet déjà de calculer les coordonnées des trois points d'intersection :

$P(4/9\,,4/9)$; $Q(1/9, 4/9)$; $R(4/9\,,1/9)$.

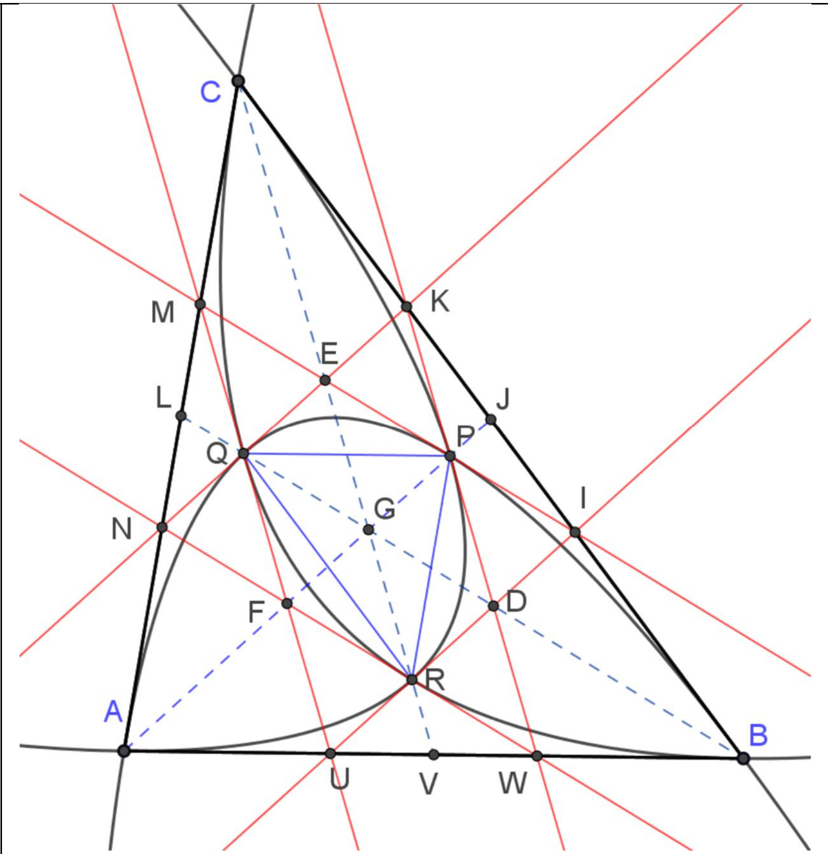
Par ailleurs on obtient aisément les équations des tangentes par dédoublement par exemple.

En P : $y = -\frac{x}{2} + \frac{2}{3}$ et en Q : $y = x + \frac{1}{3}$; d'où les coordonnées de leur intersection E $(\frac{2}{9}, \frac{5}{9})$.

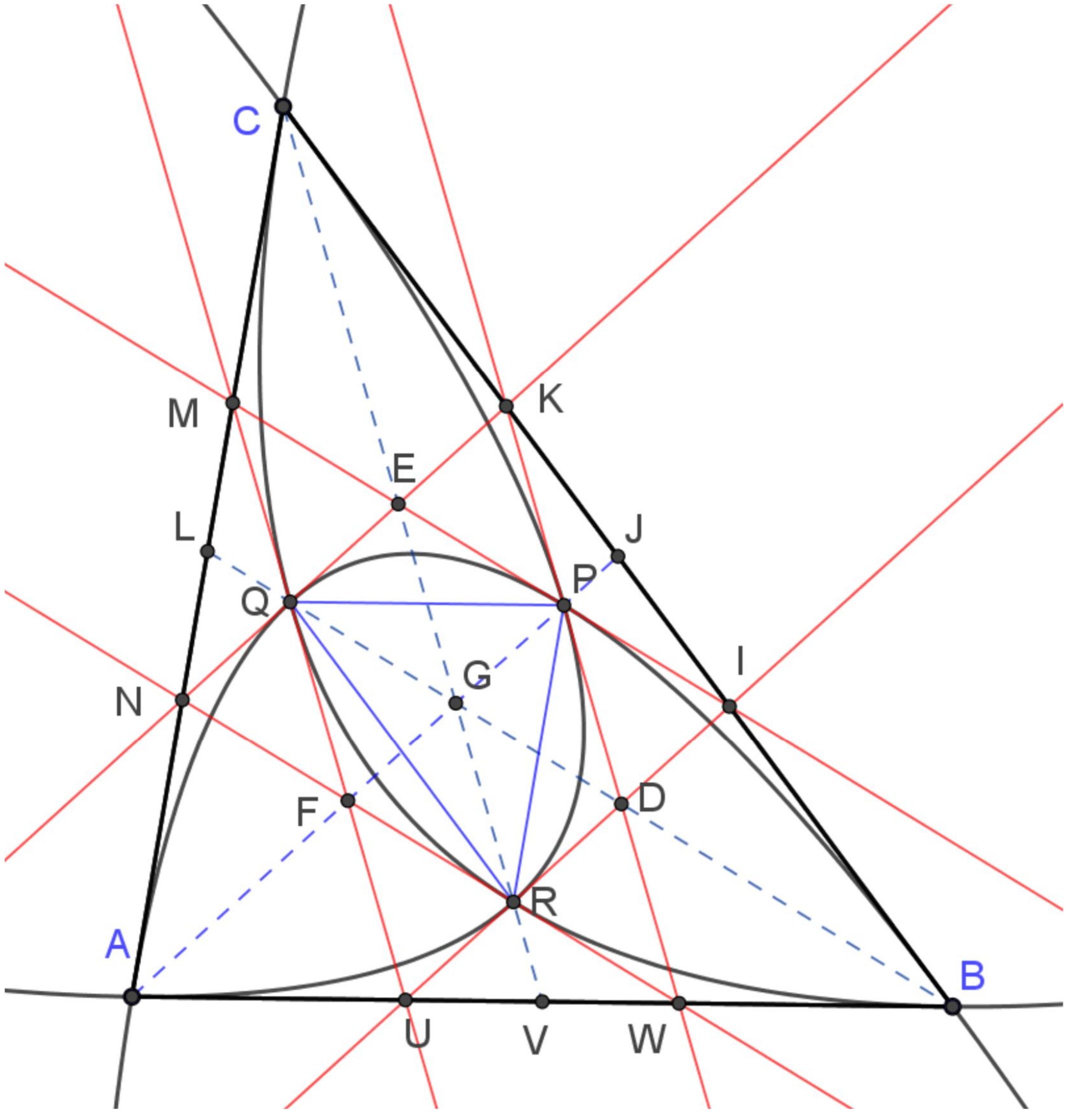
L'aire du triangle PQR vaut alors $\frac{1}{2}\left|\left|\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR}\right|\right| = \frac{1}{18}$ (ou $\frac{1}{9}\ de\ ABC$.

Pour obtenir l'aire de la partie curviligne PQR il faut ajouter trois fois l'aire du segment parabolique placé dans PEQ, soit, selon la méthode d'Archimède :

3x$\frac{2}{3}\ airePEQ = 2.\frac{1}{54} = \frac{1}{27.}$ L'aire de référence étant celle du triangle ABC, l'aire de la partie PQR en vaut



les $\frac{2}{27}$.	



C
K
M
E
L
J
P
Q
I
G
N
F
D
R
A
B
U
V
W