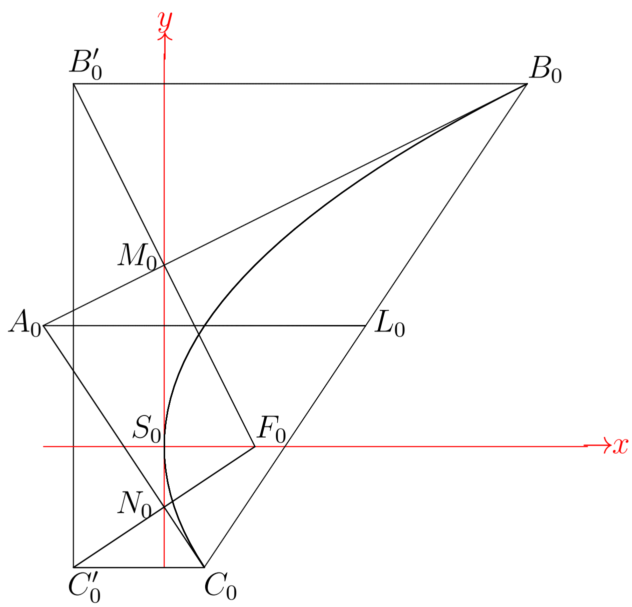
543-1,(1.) Archimède encore.

I) Préliminaires.



On considère une parabole $\mathcal{P}_0$ de sommet S_0, de foyer F_0 et de paramètre p. On considère un repère orthonormé d'origine en S_0, d'axe $\overrightarrow{S_0x}$ porté par S_0F_0 et d'axe $\overrightarrow{S_0y}$ directement perpendiculaire ; l'équation de $\mathcal{P}_0$ est $y^2 = 2px$, on a $F_0 = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$, et la directrice est la droite $\mathcal{D}_0$ d'équation $x = -\frac{p}{2}$.

On considère deux points B_0 et C_0 de $\mathcal{P}_0$,

$$B_0 = \left(\frac{t^2}{2p}, t\right) \text{ et } C_0 = \left(\frac{s^2}{2p}, s\right) ;$$

soit A_0 le point d'intersection des tangentes en B_0 et C_0 à $\mathcal{P}_0$. On a les propriétés (connues) suivantes :

(a) Puisque $\left(\frac{t^2}{2p}\right)' = \frac{t}{p}$ et $(t)' = 1$, la tangente à $\mathcal{P}_0$ en B_0 a pour pente $\frac{p}{t}$ et pour équation

$$y - t = \frac{p}{t}\left(x - \frac{t^2}{2p}\right) \iff 2px - 2py = -t^2.$$

Donc le point A_0 est l'intersection des deux droites d'équation

$$\begin{cases} 2px - 2ty = -t^2 \\ 2px - 2sy = -s^2. \end{cases}$$

On en déduit les coordonnées de A_0 :

$$A_0 = \left(\frac{st}{2p}, \frac{s+t}{2}\right).$$

(b) Soient A'_0, B'_0 et C'_0 les projetés respectifs de A_0, B_0 et C_0 sur la directrice $\mathcal{D}_0$; alors

$$A'_0 = \left(-\frac{p}{2}, \frac{t+s}{2}\right), \quad B'_0 = \left(-\frac{p}{2}, t\right) \text{ et } C'_0 = \left(-\frac{p}{2}, s\right) \cdot$$

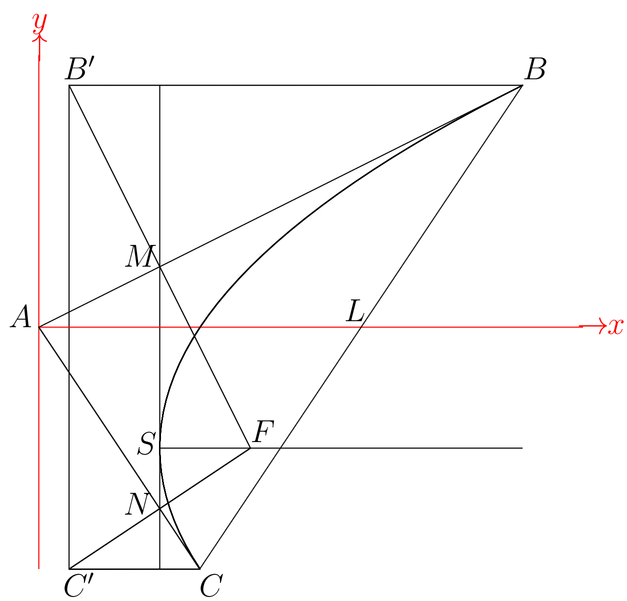
On en déduit que A'_0 est le milieu de $B'_0C'_0$, et donc, si on désigne par L_0 le milieu de B_0C_0, la droite A_0L_0 est parallèle à $B_0B'_0$ et $C_0C'_0$. On a donc montré que

l'axe de symétrie de $\mathcal{P}_0$ est parallèle à la médiane A_0L_0 du triangle $A_0B_0C_0$.

(c) On a vu que la droite A_0B_0 a pour pente $\dfrac{p}{t}$; puisque $F_0 = \left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$, la droite $F_0B'_0$ a pour pente $\dfrac{t}{-p}$, et les droites A_0B_0 et $F_0B'_0$ sont perpendiculaires. Puisque $B_0F_0 = B_0B'_0$ (définition de la parabole), on retrouve que B_0A_0 est bissectrice de l'angle $\widehat{F_0B_0B'_0}$.

On pose $M_0 = A_0B_0 \cap F_0B'_0$ et $N_0 = A_0C_0 \cap F_0C'_0$, alors M_0 et N_0 sont les milieux respectifs de FB'_0 et FC'_0 et appartiennent à la tangente au sommet S_0y.

II) Démonstration de 1.



On considère donc trois points A, B et C non alignés d'un plan affine euclidien et on cherche une parabole $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A, B, C)$ tangente en B à (AB) et tangente en C à (AC).

Soit L le milieu de BC ; d'après I) (b), l'axe de $\mathcal{P}$ est parallèle à la médiane AL. On considère donc un repère orthonormé d'origine en A, d'axe $\overrightarrow{Ax}$ porté par la médiane AL et d'axe $\overrightarrow{Ay}$ directement perpendiculaire.

Soit m la longueur de la médiane AL ; puisque $L = (m, 0)$ est le milieu de BC, les coordonnées de B et C sont de la forme

$$B = (m + d, e), \quad C = (m - d, -e), \quad e \neq 0.$$

Soit F le foyer de $\mathcal{P}$ et soient B' et C' les symétriques respectifs de F par rapport à (AB) et (AC) ; on pose $M = AB \cap FB'$ et $N = AC \cap FC'$. D'après le I) (c), on sait que (FM) et (AB) sont perpendiculaires, (FN) et (AC) sont perpendiculaires, et la tangente au sommet S de $\mathcal{P}$ est la droite (MN).

On cherche les coordonnées (u,v) de S et le paramètre p. On a alors, d'après les résultats du I), les coordonnées suivantes :

$$F=\Big(u+\frac{p}{2},v\Big),\ B'=\Big(u-\frac{p}{2},e\Big),\ C'=\Big(u-\frac{p}{2},-e\Big),\ M=\Big(u,\frac{v+e}{2}\Big),\ N=\Big(u,\frac{v-e}{2}\Big)\cdot$$

On exprime que (AB) et (FB') sont perpendiculaires ; la droite (AB) a pour pente $\dfrac{e}{m+d}$, la droite (FB') a pour pente $\dfrac{v-e}{p}$, et on a donc

$$\frac{e}{m+d}\cdot\frac{v-e}{p}=-1 \iff v=e-\frac{p}{e}\big(m+d\big).$$

Puisque les coordonnées de C s'obtiennent, à partir de celles de B, en changeant de signe d et e, on en déduit que (AC) et (FC') sont perpendiculaires si et seulement si

$$v=-e+\frac{p}{e}\big(m-d\big).$$

On en déduit

$$e-\frac{pm}{e}-\frac{dp}{e}=-e+\frac{pm}{e}-\frac{dp}{e},$$

ce qui entraîne

$$p=\frac{e^2}{m}\quad\text{et}\quad v=-\frac{de}{m}\cdot \tag{1}$$

On détermine u en exprimant que $\mathcal{P}$ passe par $B=(m+d,e)$. Puisque $S=(u,v)$, l'équation de $\mathcal{P}$ dans les axes Ax, Ay est $(y-v)^2=2p(x-u)$, et on a donc

$$\Big(e+\frac{ed}{m}\Big)^2=\frac{2e^2}{m}\big(m+d-u\big)\,;$$

il en résulte que

$$\frac{2e^2}{m}u=\frac{2e^2}{m^2}\big(m(m+d)\big)-\frac{e^2}{m^2}\big(m+d\big)^2=\frac{e^2}{m^2}\big(m+d\big)\big(m-d\big).$$

On en déduit

$$u=\frac{m^2-d^2}{2m},$$

et avec (1), on a entièrement déterminé la parabole tangente en B à (AB) et tangente en C à (AC).

Marie-Nicole Gras