

543-2 Un classique revisité.

On désigne par x et y l'âge des deux enfants ; alors $2 \leq x \leq y \leq 20$ et Sophie et Germain ont chacun un papier sur lequel est écrit $x + y$ pour l'un, xy pour l'autre.

Sophie : *en tout cas, je suis sûre que j'ai la somme.*

Donc Sophie lit un nombre n compris entre 4 et 40. On note que tout $n = uv$, $2 \leq u \leq v \leq 20$, est à la fois égal à un produit et une somme d'âges possibles ; ce n'est pas le cas d'un nombre premier p , car sa seule décomposition en produit est $p = 1 \times p$, et 1 n'est pas un âge possible. Donc Sophie lit un nombre premier, compris entre 5 et 37, et c'est la somme.

Germain : *Merci pour le renseignement, mais j'hésite quand même entre plusieurs solutions.*

Donc Germain sait que l'entier n qu'il lit est le produit, mais il existe plusieurs décompositions de n en produits de 2 entiers x et y tels que $x + y$ soit un nombre premier.

On écrit la liste de toutes les valeurs possibles du produit xy , pour chaque nombre premier p entre 5 et 37 avec $p = x + y$, $2 \leq x \leq y \leq 20$, et on obtient

p	liste									
5	6									
7	10	12								
11	18	24	28	30						
13	22	30	36	40	42					
17	30	42	52	60	66	70	72			
19	34	48	60	70	78	84	88	90		
23	60	76	90	102	112	120	126	130	132	
29	180	190	198	204	208	210				
31	220	228	234	238	240					
37	340	342								

On en déduit le tableau suivant, que Sophie et Germain ont tous les deux établi :

$p = 11,$	$5 + 6 = 11,$	$5 \times 6 = 30;$
$p = 13,$	$3 + 10 = 13,$	$3 \times 10 = 30;$
$p = 13,$	$6 + 7 = 13,$	$6 \times 7 = 42;$
$p = 17,$	$2 + 15 = 17,$	$2 \times 15 = 30;$
$p = 17,$	$3 + 14 = 17,$	$3 \times 14 = 42;$
$p = 17,$	$5 + 12 = 17,$	$5 \times 12 = 60;$
$p = 17,$	$7 + 10 = 17,$	$7 \times 10 = 70;$
$p = 19,$	$4 + 15 = 19,$	$4 \times 15 = 60;$
$p = 19,$	$5 + 14 = 19,$	$5 \times 14 = 70;$
$p = 19,$	$9 + 10 = 19,$	$9 \times 10 = 90;$
$p = 23,$	$3 + 20 = 23,$	$3 \times 20 = 60;$
$p = 23,$	$5 + 18 = 23,$	$5 \times 18 = 90.$

Sophie : *Dans ce cas, moi je la connais.*

En effet, si Sophie connaît la solution, cela veut dire qu'elle lit sur son papier le seul nombre premier qui a une unique décomposition en une somme de 2 entiers dans le tableau ci-dessus, c'est à dire $11 = 5 + 6$, et les enfants ont 5 et 6 ans.

Germain : *Alors, moi aussi.*

En effet, Germain lit 30 sur son papier et sait que Sophie a pu conclure ; la solution ne peut être que 5 et 6.

Marie-Nicole Gras