543-3 Une équation diophantienne.

On cherche s'il existe des entiers $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 4. \tag{1}$$

Il est immédiat que si (a, b, c) est une solution, alors (ma, mb, mc) est une solution ; on supposera donc que $\mathrm{pgcd}(a, b, c) = 1$.

Avec un programme, on trouve facilement 2 “petites” solutions :

$$a = 4,\ b = -1,\ c = 11\,; \qquad a = 9,\ b = -5,\ c = 11.$$

Cette équation a déjà été étudiée, pour trouver des solutions entières **positives**, et nous donnons un résumé (sans les calculs) des principaux résultats connus.

L'équation (1) s'étudie en utilisant la théorie des courbes elliptiques.

On vérifie que (1) s'écrit

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2) - 5abc = 0, \tag{2}$$

et que si on pose

$$x = \frac{-28(a+b+2c)}{6a+6b-c}, \quad y = \frac{364(a-b)}{6a+6b-c},$$

alors (2) entraîne

$$y^2 = x^3 + 109x^2 + 224x. \tag{3}$$

Si on a une solution x, y de (3), alors une solution de (1) est obtenue avec

$$a = \frac{56 - x + y}{56 - 14x}, \quad b = \frac{56 - x - y}{56 - 14x}, \quad c = \frac{-28 - 6x}{28 - 7x}.$$

L'équation (3) est l'équation d'une courbe elliptique ; on considère l'ensemble E des points $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ qui vérifient (3), et on définit sur E une loi de groupe. Si 2 points P et Q appartiennent à E, et alors on définit $P \oplus Q$, ce qui donne un autre point de E et permet de construire une infinité de solutions de (3) et donc de (1).

Voici les résultats numériques donnés dans [1] :

(i) l'équation (3) admet une solution $x = -100$, $y = 260$, ce qui donne la solution $a = 4,\ b = -1,\ c = 11$; alors $P = (-100, 260) \in E$.

(ii) On calcule $P \oplus P = 2P$, puis $(2P) \oplus P = 3P$, et ainsi de suite et $9P$ permet d'obtenir des a, b, c positifs, entiers d'environ 80 chiffres.

On obtient ainsi, à partir de kP, $k = 1, 2, 3$, les valeurs de a, b, c suivantes :

$$\begin{array}{llll}
k = 1 & a = 4 & b = -1 & c = 11 \\
k = 2 & a = 5165 & b = 9499 & c = -8784 \\
k = 3 & a = 679733219 & b = -375326521 & c = 883659076,
\end{array}$$

et enfin pour $k = 9$, la solution positive, annoncée comme la plus petite possible,

$$
\begin{aligned}
a =& 154476802108746166441951315019919837485664325669565431700026 \\
& 6348982532020352779999, \\
b =& 368751317941299998271978115652254748254929799689719709962831 \\
& 3747163722463405579, \\
c =& 437361267792869725786125260237139015281653755816161361862143 \\
& 7993378423467772036.
\end{aligned}
$$

Les entiers a, b, c ont respectivement 81,80,79 chiffres.

Remarque 1.
La solution $a = 9,\ b = -5,\ c = 11$ provient du point $Q = (-56, 392)$, mais $2Q = 2P$; par contre $P + Q$ donne de nouvelles valeurs $a = 5951$, $b = -9071$ et $c = 9841$, et si on calcule $P + 12Q$, on obtient bien une solution positive d'environ 166 chiffres !

Remarque 2. Si on considère l'équation $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} = N$, c'est avec $N = 4$ que la plus petite solution positive est obtenue (c.f. [2]).

Bibliographie.

[1] https://www.agftutoring.com/x-yz-y-xz-z-xy-4/

[2] An unusual cubic representation problem, Andrew Bremnera, Allan Macleodb, Annales Mathematicae et Informaticae 43 (2014), pp. 29-41.
https://ami.uni-eszterhazy.hu/uploads/papers/finalpdf/AMI_43_from29to41.pdf

Marie-Nicole Gras