543-4 Somme de fractions égyptiennes.

Soit $n \geq 1$ un entier ; nous allons montrer qu'il existe des entiers $x, y \geq 1$ tels que

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \tag{1}$$

si et seulement si n est divisible par 2 ou par un nombre premier p, $p \equiv -1 \pmod 4$.

(I) Si n est divisible par 2, $n = 2N$, alors

$$\frac{4}{2N} = \frac{1}{N} + \frac{1}{N}.$$

(II) Si n est divisible par un nombre premier p, $p \equiv -1 \pmod 4$, alors $n = (4k-1)m$, et on a les égalités

$$\frac{4}{4k-1} = \frac{4k}{k(4k-1)} = \frac{(4k-1)+1}{k(4k-1)} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k(4k-1)},$$

et

$$\frac{4}{n} = \frac{4}{m(4k-1)} = \frac{1}{mk} + \frac{1}{mk(4k-1)}.$$

(III) Si n n'est pas divisible par 2 ou par un nombre premier p, $p \equiv -1 \pmod 4$, cela veut dire que la décomposition de n en facteurs premiers est de la forme

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t}, \quad p_i \equiv 1 \pmod 4), i = 1, \ldots, t.$$

On suppose qu'il existe des entiers $x \geq 1$ et $y \geq 1$ tels que $\dfrac{4}{n} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, et va montrer que cela est absurde.

Soit $d = \mathrm{pgcd}(x, y)$; alors $x = dx'$, $y = dy'$, $\mathrm{pgcd}(x', y') = 1$ et on peut supposer que, pour tout $i = 1, \ldots, t$, p_i ne divise pas d (sinon, on est ramené au même problème, avec un n plus petit). On a alors

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{dx'} + \frac{1}{dy'},$$

ce qui s'écrit

$$4dx'y' = n(x' + y'). \tag{2}$$

On a $\mathrm{pgcd}(d, n) = 1$, et donc n (impair) divise $x'y'$; puisque de plus, $\mathrm{pgcd}(x', y') = 1$, il existe des entiers n_1 et n_2 tels que $n = n_1 n_2$, $\mathrm{pgcd}(n_1, n_2) = 1$ et

$$x' = n_1 x'', \quad y' = n_2 y'',$$

et on a $n_1 \equiv 1 \pmod 4$ et $n_2 \equiv 1 \pmod 4$.

On remplace dans (2), et on obtient

$$\begin{aligned} 4dn_1x''n_2y'' &= n_1n_2(n_1x'' + n_2y'') \\ \Longleftrightarrow (4dx'' - n_2)y'' &= n_1x''. \end{aligned}$$

Or, n_1 est premier avec y'' (car $\mathrm{pgcd}(x', y') = 1$) et donc n_1 divise $4dx'' - n_2$ et il existe un entier $\lambda_1 \geq 1$ tel que

$$4dx'' - n_2 = \lambda_1 n_1,$$

et alors
$$\lambda_1 n_1 y'' = n_1 x''.$$
On a donc $x'' = \lambda_1 y''$, et de la même manière, par symétrie, $y'' = \lambda_2 x''$; on en déduit $\lambda_1\lambda_2 = 1$, et donc, puisque ce sont des entiers, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; donc il existe un entier z tel que
$$x' = n_1 z \quad \text{et} \quad y' = n_2 z.$$
Mais x' et y' sont premiers entre eux, donc $z = 1$, et on a $x' = n_1$ et $y' = n_2$.

Alors, (2) s'écrit
$$4d = n_1 + n_2,$$
et donc
$$n_1 + n_2 \equiv 0 \pmod 4,$$
ce qui est absurde puisque
$$n_1 + n_2 \equiv 1 + 1 \pmod 4.$$

Remarque. La conjecture d'Erdös-Strauss (pas encore démontrée) est la suivante :
pour tout entier $n \geq 2$, il existe des entiers $a, b, c \geq 1$ tels que
$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Marie-Nicole Gras