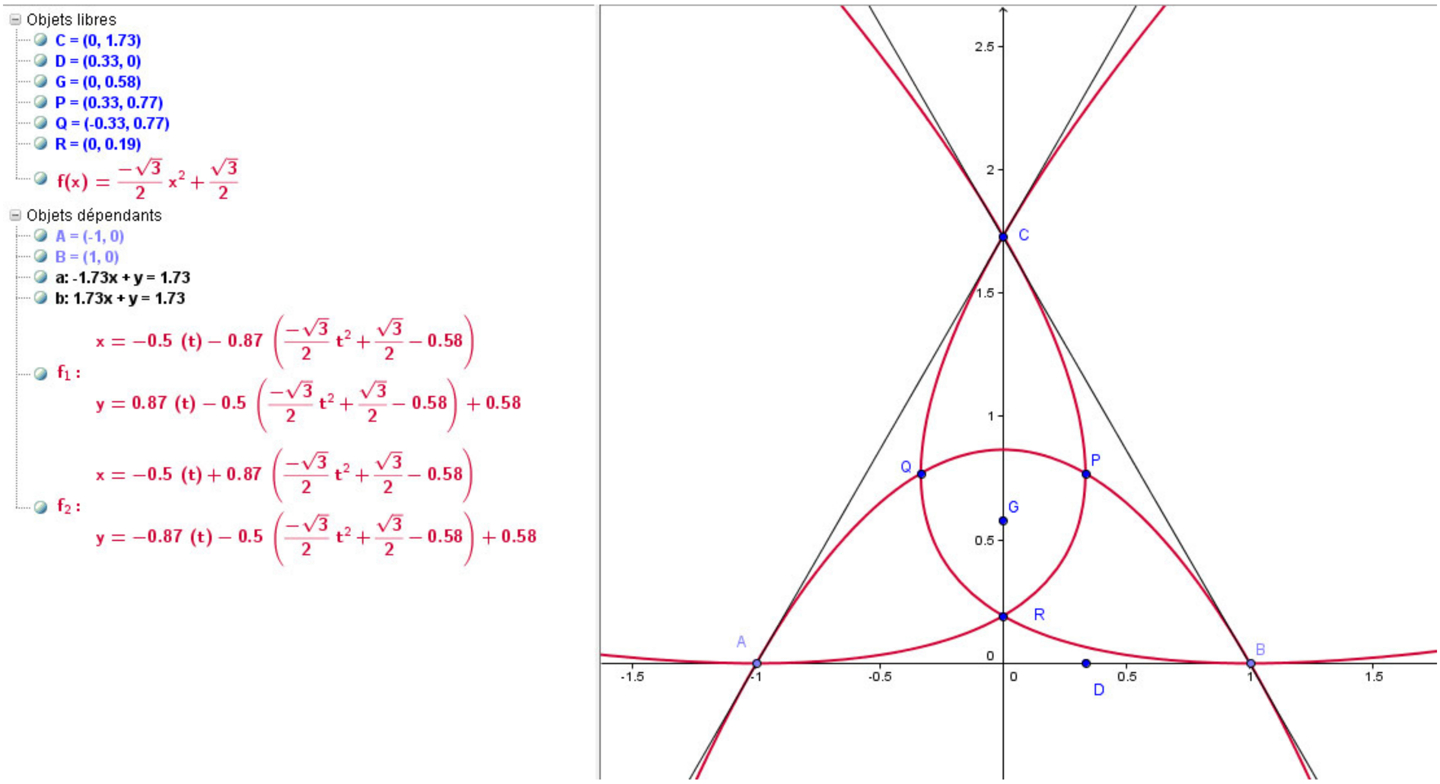
Exercice 543 - 1

On considère le triangle ABC dans un repère orthonormé avec $A(-1;0)$, $B(1;0)$ et $C(0;\sqrt{3})$.
Comme pour tout rectangle, il existe une seule transformation affine mettant ce triangle en bijection avec ABC on va regarder ce qui se passe sur ABC.

La transformation affine conservant l'alignement et le rapport des segments, l'image d'une parabole est une parabole de même excentricité. La transformation affine transforme le foyer en le foyer et la directrice en la directrice. Les rapports de longueur étant conservés les rapports d'aire aussi.

Pour la première question, on va regarder qu'il n'y a qu'une parabole passant par A et B et tangente à (AC) et (BC) respectivement.



L'équation d'une parabole est $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ avec $b^2 - ac = 0$.
Si $a = 0$ alors on a $b = 0$ et $cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$.
Si $c = 0$ alors on a l'équation d'une droite mais la seule droite passant par A et B est l'axe des abscisses qui n'est pas tangente à (AC) et (BC).
Avec $c \neq 0$, on a les paraboles possibles P sous la forme $y^2 + 2dx + 2ey + f = 0$
Avec $A \in P$, on a $-2d + f = 0$ et avec $B \in P$, on a $2d + f = 0$.
Le système $\begin{cases} -2d + f = 0 \\ 2d + f = 0 \end{cases}$ n'a qu'une solution $d = f = 0$
La forme $y^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ devient $y^2 + 2ey = 0$ soit $y(y + 2e) = 0$ est la réunion de deux droite qui ne peut pas être une parabole tangente à (AC) et (BC).

On a donc $a \neq 0$, et on peut prendre $a = 1$, $c = b^2$ et $x^2 + 2bxy + b^2y^2 + 2dx + 2ey + f = 0$.
Avec $A \in P$, on a $1 - 2d + f = 0$ et avec $B \in P$, on a $1 + 2d + f = 0$.
Le système $\begin{cases} 1 - 2d + f = 0 \\ 1 + 2d + f = 0 \end{cases}$ n'a qu'une solution $\begin{cases} d = 0 \\ f = -1 \end{cases}$
En posant $P(x, y) = x^2 + 2bxy + b^2y^2 + 2ey - 1$, l'équation de la tangente au point $M(x_0, y_0)$ est donnée par $(x - x_0)\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$

On a $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y)=2x+2by$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)=2bx+2b^2y+2e$

Et pour l'équation $(x-x_0)(2x_0+2by_0)+(y-y_0)(2bx_0+2b^2y_0+2e)=0$.

Il vient $(x-x_0)(x_0+by_0)+(y-y_0)(bx_0+b^2y_0+e)=0$

$(x_0+by_0)x+(bx_0+b^2y_0+e)y-(x_0{}^2+bx_0y_0+bx_0y_0+b^2y_0{}^2+ey_0)=0$

Soit $(x_0+by_0)x+(bx_0+b^2y_0+e)y-(x_0{}^2+2bx_0y_0+b^2y_0{}^2+ey_0)=0$

Comme $M(x_0,y_0)\in P$, on a $x_0{}^2+2bx_0y_0+b^2y_0{}^2+2ey_0-1=0$ soit $x_0{}^2+2bx_0y_0+b^2y_0{}^2+ey_0=1-ey_0$

L'équation de la tangente peut donc s'écrire $(x_0+by_0)x+(bx_0+b^2y_0+e)y+ey_0-1=0$

En A, on a l'équation A, on a l'équation $-x+(-b+e)y-1=0$ et en B, on a l'équation $x+(b+e)y-1=0$.

Or les équations de ces tangentes sont A, on a l'équation $-x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y-1=0$ et $x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y-1=0$

On a donc $b=0$ et $e=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ une seule parabole $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$P(C;A,B)$ a donc pour équation $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

On pose $G\left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ le centre de gravité du triangle ABC.

$P(A;B,C)$ se déduit de $P(C;A,B)$ par rotation de centre G et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ a pour équation paramétrique

$$\begin{cases} x(t)=-\dfrac{1}{2}t-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\\ y(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

$P(B;A,C)$ se déduit de $P(C;A,B)$ par rotation de centre G et d'angle $\dfrac{4\pi}{3}$, c'est le symétrique de $P(A;B,C)$ par rapport à l'axe des ordonnées a pour équation paramétrique

$$\begin{cases} x(t)=-\dfrac{1}{2}t+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\\ y(t)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}.$$

On va se concentrer sur $P(A;B,C)$ avec $\begin{cases} x(t)=-\dfrac{1}{2}t-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\\ y(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$

soit $\begin{cases} x(t)=-\dfrac{1}{2}t+\dfrac{3}{4}t^2-\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{6}=\dfrac{3}{4}t^2-\dfrac{1}{2}t-\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}t^2-\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}(3t^2-2t-1)\\ y(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\dfrac{\sqrt{3}}{4}t^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(t^2+2t+1)\end{cases}$

Pour l'intersection avec $P(B;A,C)$, on a

$x'(t)=\frac{3}{2}t-\frac{1}{2}=0$ soit $t=\frac{1}{3}$ et

$$\begin{cases} x\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}\left(3\times\frac{1}{9}-2\times\frac{1}{3}-1\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1-2-3}{3}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{-4}{3}=\frac{-1}{3} \\ y(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}+2\times\frac{1}{3}+1\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1+6+9}{3}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{16}{9}\times\sqrt{3}=\frac{4}{9}\sqrt{3} \end{cases}$$

On a donc $Q\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{9}\sqrt{3}\right)$ et par symétrie $P\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{9}\sqrt{3}\right)$, les coordonnées de R ne sont pas nécessaires car PQR est un triangle équilatéral. Mais pour la forme $R\left(0,\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$

On note $S\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, le sommet de la parabole $P(C;A,B)$, l'aire du triangle QSP est donnée par

$$Aire(QSP)=2\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{9\sqrt{3}}{18}-\frac{8\sqrt{3}}{18}\right)=\frac{\sqrt{3}}{54}$$

Pour l'aire de la lunule $Q\hat{S}P$ on multiple par $\frac{4}{3}$

$$Aire(Q\hat{S}P)=\frac{4}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{54}=\frac{2\sqrt{3}}{81}$$

L'aire centrale QPR est donc l'aire du triangle équilatéral QPR plus les 3 lunules

$$Aire(QPR)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}+3\times\frac{2\sqrt{3}}{81}=\frac{4\sqrt{3}}{36}+\frac{2\sqrt{3}}{27}=\frac{\sqrt{3}}{9}+\frac{2\sqrt{3}}{27}=\frac{3\sqrt{3}}{27}+\frac{2\sqrt{3}}{27}=\frac{5\sqrt{3}}{27}$$

$$Aire(ABC)=2^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$$

Donc $Aire(QPR)=\frac{5}{27}\times Aire(ABC)$

Pour l'aire de la partie AQR qui est la même que CQP et BPR. On va considérer le point $D\left(0,\frac{1}{3}\right)$, on va calculer l'aire entre la parabole et l'axe des abscisses entre A D par l'intégrale, en retranchant l'aire du triangle rectangle APD il faudra encore multiplier par deux et enlever l'aire centrale.

$$Aire(A\hat{Q}R)=2\left(\int_{-1}^{\frac{1}{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}dx-\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\frac{4\sqrt{3}}{9}\times\frac{1}{2}\right)-\frac{5\sqrt{3}}{27}$$

$$Aire(A\hat{Q}R)=2\left(\left[-\frac{\sqrt{3}}{6}x^3+\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]_{-1}^{\frac{1}{3}}-\frac{4}{3}\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\right)-\frac{5\sqrt{3}}{27}$$

$$Aire(A\hat{Q}R)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\times\frac{1}{27}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{8\sqrt{3}}{27}\right)-\frac{5\sqrt{3}}{27}$$

$$Aire(A\hat{Q}R)=2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{162}+\frac{81}{162}-\frac{48}{162}\right)-\frac{5\sqrt{3}}{27}$$

$$Aire(A\hat{Q}R)=2\sqrt{3}\left(\frac{32}{162}\right)-\frac{5\sqrt{3}}{27}=\frac{32\sqrt{3}}{81}-\frac{15\sqrt{3}}{81}=\frac{17}{81}\sqrt{3}=\frac{17}{81}Aire(ABC)$$

Pour les trois aires restantes ARB, AQC, CPQ on

$$Aire(A\hat{R}B)=\left(\sqrt{3}-3\times\frac{17}{81}\sqrt{3}-\frac{5}{27}\sqrt{3}\right)\times\frac{1}{3}=\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{17}{81}-\frac{5}{81}\right)=\sqrt{3}\left(\frac{27-17-5}{81}\right)=\frac{5}{81}\sqrt{3}$$

Donc $Aire(A\widehat{R}B)=\frac{5}{81}Aire(ABC)$

Pour résumer :

$Aire(QPR)=\frac{15}{81}\times Aire(ABC)$ pour l'aire centrale.

$Aire(A\widehat{Q}R)=\frac{17}{81}Aire(ABC)$ pour les aires tangentes aux angles.

$Aire(A\widehat{R}B)=\frac{5}{81}Aire(ABC)$ pour les aires près des segments.