Archimède encore

Problème 543-1 d'au fil des maths

Proposé par J.P. Friedelmeyer

Soit donnés A, B et C non alignés d'un plan euclidien.

1. Démontrer qu'il existe une et une parabole *P*(A ; B , C) tangente en B à (AB) et en C à (AC) (figure 1).
2. On construit les trois paraboles *P*(A ; B , C), *P*(B ; C,A), *P*(C ; A , B) où les rôles des points A, B et C sont permutés, et qui se coupent deux à deux en trois points P, Q et R, délimitant sept surfaces curvilignes à l'intérieur du triangle ABC (figure 2). Déterminer l'aire de chacune de ces surfaces en fonction de l'aire du triangle ABC.

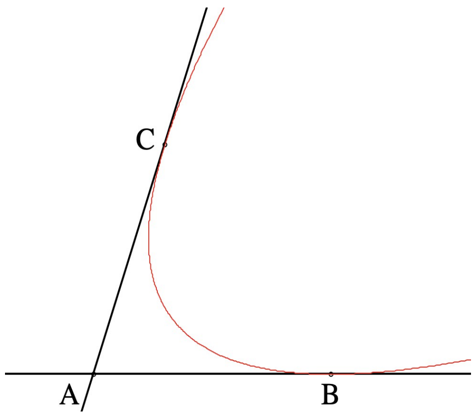

Figure 1

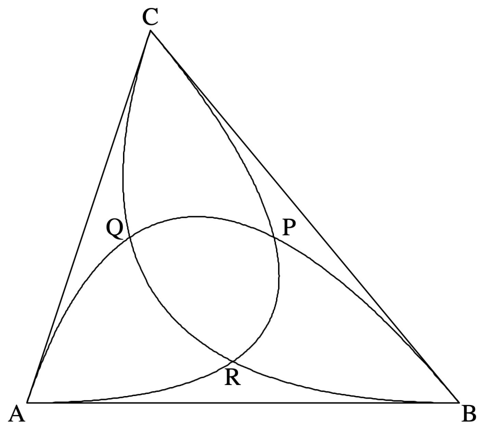

Figure 2

Solution

Remarque préalable

Je pense qu'il s'agit du plan affine et non pas du plan euclidien, en gardant en mémoire qu'il n'existe qu'une application linéaire qui envoie trois points non alignés T, U, V sur trois points T', U', V' non alignés (du point de vue des écritures, ici le caractère ' peut être considéré comme un symbole fonctionnel mais c'est une autre histoire).

Ceci étant dit, lorsque le triangle ABC est équilatéral il est évident que, par rotations de tiers de tour : aire(AQR) = aire(BRP) = aire(CPQ)

et aire(ABR) = aire(BCP) = aire(CAQ).

Ce constat demeure lorsque ABC est quelconque.

1. De manière savante, il est bien connu que par cinq points, ou trois points et un quatrième avec sa tangente, où ici avec deux points B et C et leurs tangentes (BA) et (CA) et une tangente (la droite de l'infini) passe une unique conique.

Pour mieux s'en convaincre, de manière analytique dans un repère (A,x,y) regardons les paraboles situées dans le premier quadrant et tangentes aux axes. Elles ont pour équation P : $p*x^2 + q*x*y + r*y^2 + s*x + t*y + u = 0$ (p,q,r non tous nuls), qui se peut s'exprimer comme : $(y - m^2*x)^2 - 2*m^2*n*x - 2*m*n*y + m^2*n^2 = 0$. En effet, il est nécessaire que : la partie du second degré soit un carré pour avoir un point double à l'infini et être une parabole et que les intersections avec les axes soient des points doubles [n,0] sur Ax et [0, m*n] sur Ay. Ainsi pour B = [b,0] et C = [0,c] il n'y a qu'une possibilité : n = b et m = c/b.

Le point M étant le milieu de BC, cette dernière égalité implique que la droite (AM) est parallèle à l'axe de la parabole de pente m.

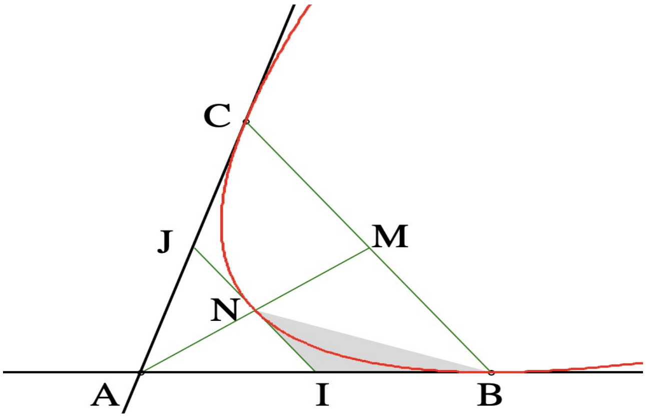

Figure 1.

Etant donné une parabole *P* et une corde UV, appelons *lunule* la partie du plan limitée par P et UV, que nous notons : lune(UV). Ci-dessus, le triangle IBN est l'image affine du triangle ABC donc lune(BN) est l'image de lune(BC). Le rapport des aires est constant et vaut 1/8.

Il apparaît que lune(BC) est l'union disjointe de lune(BN), de lune(CN) et du triangle BCN. Notons k le rapport aire(lunule) / aire(triangle associé) et prenons pour unité d'aire celle du triangle IBN. On a les égalités :

aire(lune(BC)) = aire(lune(BN)) + aire(lune(CN)) + aire(triangle(BCN)) = k + k + 4
= k*aire(triangle(BCN)) = 8*k

Il s'en suit de k = 2/3. On retrouve le résultat bien connu d'un théorème attribué à Archimède.

De manière générale, l'aire d'une lunule ne dépend que de la largeur L de la bande parallèle à l'axe, qui enserre cette lunule. Cette dépendance est proportionnelle à L^3. Je laisse au lecteur le plaisir de s'en convaincre.

Le plan affine est le royaume des barycentres, où tout point M est barycentre de manière unique de trois points linéairement indépendants.

Plaçons nous dans le cas simple où les points A, B, C ont pour coordonnées respectives [0,-1], [1,1], [-1,1] et cherchons à exprimer M de coordonnées [x,y] sous la forme M = a*A + b*B + c*C, avec a+b+c = 1.

Par exemple : [0,1] = (B+C)/2 et [0,0] = (2*A+B+C)/4

En général, ces coordonnées cartésiennes sont x = b-c et y = -a+b+c = 1-2*a .

Pour M sur la parabole, on a : y = x*x . Ainsi 1-2*a = (b-c)^2 = (1-a)^2 – 4*b*c ; soit a^2 = 4*b*c . En posant b =   *q^2 et c =   *p^2, avec   = ±1il vient a = 2*p*q .

Du fait a+b+c = 1, il apparaît que p+q = 1. On retrouve la parabole comme courbe de Bézier, où M = (1-p)^2*B + 2*p*(1-p)*A + p^2*C

Ceux qui utilisent un Mac, peuvent constater qu'avec *Aperçu* (outil spécifique d'Apple) en saisissant un segment par son milieu on le déforme en une courbe. Cette courbe est une parabole ! Plus précisément, le point saisi correspond au point N de la figure 1, ci-dessus.

2. Le point P se situe sur la parabole *P*(B ; C, A) et la médiatrice de BC. Dans l'expression P = (1-p)^2*A + 2*p*(1-p)*B + p^2*C, il faut que 2*p*(1-p) = p^2 c'est-à-dire : p = 2/3 . Ainsi, P = (A+4*B+4*C)/9 et, par analogie, on a Q = (B+4*C+4*A)/9 et R = (C+4*A+4*B)/9 .

Ci-dessous, choisissons comme unité de surface l'aire d'un triangle élémentaire.

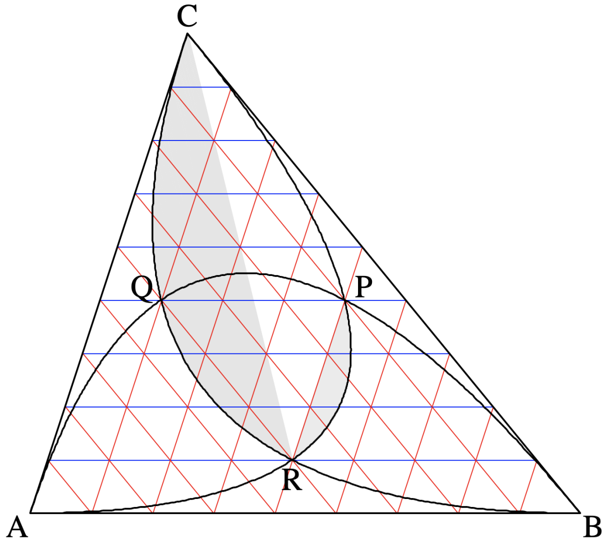

Figure 2

On a :
aire triangle ABC = 81
aire triangle PQR = 9
aire triangle ABR = 9
aire lunule CR = 16
aire lunule PR = 2

Ainsi
aire(PQR) = 9 + 3*2 = 15
aire(AQR) = aire(BRP) = aire(CPQ) = 2*16 – 15 = 17
aire(ABR) = aire(BCP) = aire(CAQ) = 9 – 2*2 = 5

Pour répondre à la question, il faut comparer ces nombres à 81.