## 543-1 Archimède encore

### Question 1

On utilise les coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B, C).

Une conique a une équation du type : $p \cdot x^2 + q \cdot y^2 + r \cdot z^2 + u \cdot yz + v \cdot zx + w \cdot xy = 0$

On va trouver les constantes p, q, r, u, v, w pour la parabole $\mathcal{P}$(A ;B,C) :

En remplaçant z par 0 dans l'équation, on obtient : $p \cdot x^2 + q \cdot y^2 + w \cdot xy = 0$ (1)

Le fait que la droite (AB) est tangente en B à la conique signifie que l'équation (1) admet $(x, y) = (0,1)$ comme racine double. Donc : $q = w = 0$

De même le fait que la droite (AC) est tangente en C à la conique signifie : $r = v = 0$

Le fait que la conique est une parabole signifie qu'elle est tangente à la droite de l'infini, d'équation $x + y + z = 0$

En remplaçant x par $-y - z$ dans l'équation $p \cdot x^2 + u \cdot yz = 0$, on obtient :

$$p \cdot y^2 + (u + 2p) \cdot yz + p \cdot z^2 = 0$$

Le discriminant de cette équation est nul si : $u = -4p$

La parabole $\mathcal{P}$(A ;B,C) a donc pour équation : $x^2 - 4 \cdot yz = 0$

### Question 2

Les transformations affines conservent les rapports d'aires.

On peut donc se ramener au cas d'un triangle ABC équilatéral, en utilisant une transformation affine.

On note U l'aire du triangle curviligne PQR.

Les isométries du triangle ABC montrent que les triangles curvilignes AQR, BRP, CPQ ont la même aire, qu'on note V et que les triangles curvilignes BPC, CQA, ARB ont la même aire, qu'on note W.

Soit O le milieu de [BC].

On utilise le repère cartésien $\mathcal{R} = \left( O;\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OA} \right)$

On calcule les aires à l'aide du déterminant par rapport à la base $\left( \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OA} \right)$.

Ainsi l'aire du triangle ABC vaut 1.

On va calculer l'aire S entre la parabole $\mathcal{P}(A\,;B,C)$ et le segment [BC] et l'aire W du triangle curviligne BPC.

Soit M un point de coordonnées barycentriques (x, y, z) dans le repère affine (A, B, C), avec $x + y + z = 1$

Alors : $\overrightarrow{OC} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC} = x \cdot \overrightarrow{OA} + (z - y) \cdot \overrightarrow{OC}$

Les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $\mathcal{R}$ sont : $(u, v) = (z - y, x)$

L'équation barycentrique $x^2 - 4 \cdot yz = 0$ de $\mathcal{P}(A\,;B,C)$ devient dans $\mathcal{R}$ : $v = \dfrac{1 - u^2}{2}$

$$S = \int_{-1}^{1} \frac{1 - u^2}{2} \cdot du = \int_{0}^{1} (1 - u^2) \cdot du = \left[ u - \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

L'équation barycentrique $z^2 - 4 \cdot xy = 0$ de $\mathcal{P}(C\,;A,B)$ devient dans $\mathcal{R}$ :

$$(9v + 3u - 5)^2 = 16 \cdot (1 - 3u)$$

Pour $-1 \leq u \leq 0$ , $9v + 3u - 5 \leq 0$ et $9v + 3u - 5 = -4 \cdot \sqrt{1 - 3u}$

Donc : $9v = 5 - 3u - 4 \cdot \sqrt{1 - 3u}$

Et : $$W = \frac{2}{9} \cdot \int_{-1}^{0} \left( 5 - 3u - 4 \cdot \sqrt{1 - 3u} \right) \cdot du = \frac{2}{9} \cdot \left[ 5u - \frac{3}{2} \cdot u^2 + \frac{8}{9} \cdot (1 - 3u)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^{0} = \frac{5}{81}$$

$$\begin{cases} U + 3 \cdot V + 3 \cdot W = 1 & \text{(aire du triangle ABC)} \\ U + 2 \cdot V + W = \dfrac{2}{3} & \text{(aire entre une parabole et sa corde)} \end{cases}$$

Donc : $U = \dfrac{5}{27}$ et $V = \dfrac{17}{81}$