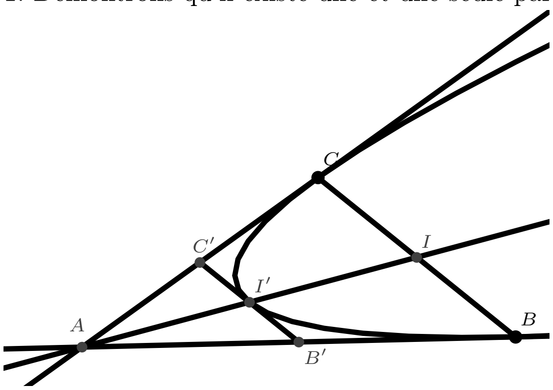
543-1 Archimède encore

Sont donnés trois points A , B et C non alignés d'un plan affine euclidien.

1. Démontrons qu'il existe une et une seule parabole $\mathcal{P}(A;B;C)$ tangente en B à (AB) et en C à (AC)



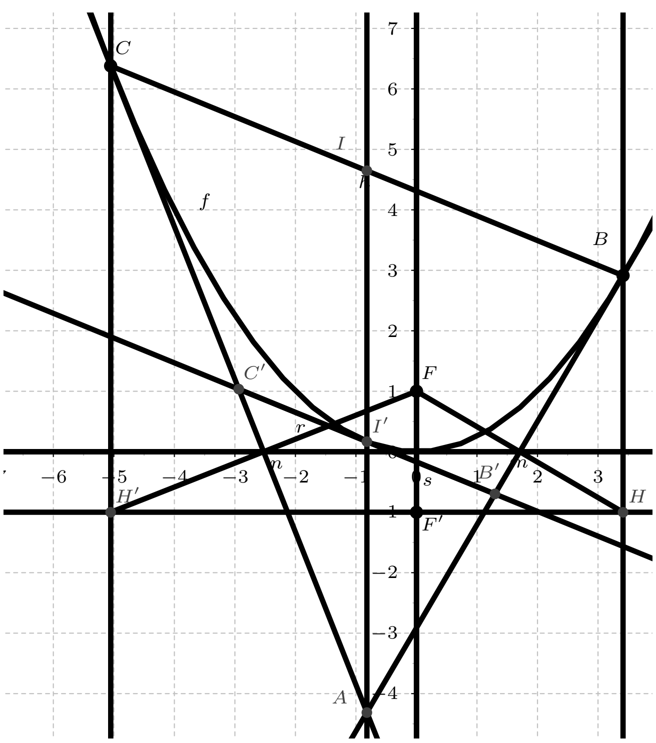
Supposons qu'il existe une parabole $\mathcal{P}(A;B;C)$ tangente en B à (AB) et en C à (AC) .

Soit F son foyer et (D) sa directrice.

Considérons I le milieu du segment $[BC]$ et soit (Δ) la droite (AI) .

a) (Δ) est parallèle à l'axe de la parabole.

Pour le prouver , on choisit comme repère , le repère ayant pour origine le sommet de la parabole , pour axe des abscisses la droite passant par S et parallèle à la directrice et pour axe des ordonnées l'axe de la parabole.



La parabole a une équation de la forme :$y = ax^2$,notons $B(x_1, y_1)$ et $C(x_2, y_2)$

La tangente au point B a pour équation : $y = 2ax_1x - ax_1^2$

La tangente au point C a pour équation : $y = 2ax_2x - ax_2^2$

Les 2 tangentes se coupent au point A dont l'abscisse x est solution de l'équation :

$2ax_1x - ax_1^2 = 2ax_2x - ax_2^2$
$\iff 2ax(x_1 - x_2) = a(x_1^2 - x_2^2)$
$\iff x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = x_I$ donc $x_A = x_I$

on en déduit que la droite (AI) est parallèle à l'axe de la parabole et que l'abscisse du point A est la moyenne arithmétique des abscisses des points B et C .

b) Soit B' le milieu de $[AB]$ et C' le milieu de $[AC]$
soit I' le point d'intersection de la droite (AI) et de la parabole alors démontrons que la tangente au point I' est la droite $(B'C')$

La tangente à la parabole au point B et la tangente à la parabole au point I' se coupent en un point X dont l'abscisse est la moyenne arithmétique des abscisses de B et de I' , comme l'abscisse de I' est la même que celle de A , il résulte que l'abscisse de X est la moyenne arithmétique des abscisses de B et de A soit l'abscisse du milieu de $[AB]$,et comme le point X et le point B' appartiennent à $[AB]$ donc B' =X
de même on démontre que les tangentes au point I' et C se coupent au point C' milieu de $[AC]$
donc la tangente au point I' est la droite $(B'C')$.

La parabole est donc tangente au trois côtés du triangle AB'C' , il en résulte que le foyer de la parabole se trouve sur le cercle circonscrit au triangle AB'C' car les projections du foyer sur les trois côtés du triangle sont alignés , ils se trouvent sur la tangente au sommet de la parabole qui est la droite de Steiner de F.

Démontrons que la droite (AF) est la symédiane issue de A , c'est à dire la symétrique de la médiane par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Comme les droites (AB) et (AC) sont des tangentes à la parabole , elles sont les médiatrices respectivement des segments $[FH]$ et de $[FH']$, on en déduit que $AH = AF = AH'$ donc H et H' appartiennent au cercle de centre A et de rayon AF.

La droite (AI) est la médiatrice de $[HH']$, donc (AI) est la bissectrice de l'angle (AH, AH')
et (AB) est la bissectrice de (AH, AF)
On en déduit que $(AI, AB) = \dfrac{1}{2}(AH', AF) = (AF, AC)$
Les angles (AB, AC) et (AF, AI) ont la même bissectrice.
donc (AF) est la symédiane issue de A.
Le foyer de la parabole est l'intersection du cercle circonscrit et de la symédiane issue de A .
et la directrice est la droite passant par les symétriques du foyer F par rapport respectivement à (AB) et (AC).
On en déduit que la parabole $\mathcal{P}(A; B; C)$ existe et est unique.

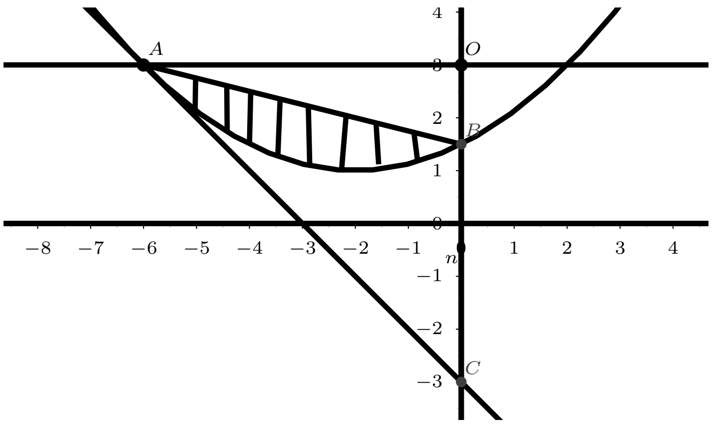
2°)**Calcul de l'aire de chacune des surfaces**

Pour déterminer l'aire de chacune de ces surfaces en fonction de l'aire du triangle ABC , le titre du problème m' a conduit à chercher la méthode d'Archimède pour calculer l'aire d'un secteur parabolique.
J'ai trouvé la méthode dans un article de M.Jean Moussa dans la brochure de l'APMEP N°523 .

a) **Préliminaires** : Soit G le centre de gravité du triangle ABC
Démontrons que le point R est le centre de gravité du triangle GAB , que P est le centre de gravité du triangle GBC et Q est le centre de gravité du triangle GAC.
Soit G_1 le centre de gravité du triangle GAB ,
on choisit comme repère , le repère ayant pour origine le sommet de la parabole , pour axe des abscisses la droite passant par S et parallèle à la directrice et pour axe des ordonnées l'axe de la parabole alors
La parabole a une équation de la forme :$y = ax^2$
Alors $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$
$x_{G_1} = \dfrac{x_G + x_A + x_B}{3}$ $x_{G_1} = \dfrac{4x_A + 4x_B + x_C}{9}$
Mais comme A est le point d'intersection des deux tangentes en B et en C respectivement à la parabole , alors
$x_A = \dfrac{x_B + x_C}{2}$
$x_{G_1} = \dfrac{2x_B + x_C}{3}$
$A \in T_C$, $T_C : y = 2axx_C - ax_C^2$, on en déduit que $y_A = ax_Bx_C$
$y_{G_1} = \dfrac{4y_A + 4y_B + y_C}{9}$ $\dfrac{4ax_Bx_C + 4ax_B^2 + ax_C^2}{9} = a\dfrac{(2x_B + x_C)^2}{9} = a\left(\dfrac{2x_B + x_C}{3}\right)^2$
$y_{G_1} = ax_{G_1}^2$ donc $G_1 \in \mathcal{P}(A; B; C)$
Par un calcul analogue , on démontre que G_2 le centre de gravité du triangle GAC appartient à $\mathcal{P}(A; B; C)$.
donc $\mathcal{P}(A; B; C)$ passe par G_1 et G_2,
on démontrait de même que :
$\mathcal{P}(C; A; B)$ passe par G_2 et G_3 et
$\mathcal{P}(B; A; C)$ passe par G_1 et G_3
On en déduit que $R = G_1$, $P = G_3$ et $Q = G_2$

b) **Calcul des surfaces**
Pour calculer l'aire des surfaces , j'utilise la méthode d'Archimède :

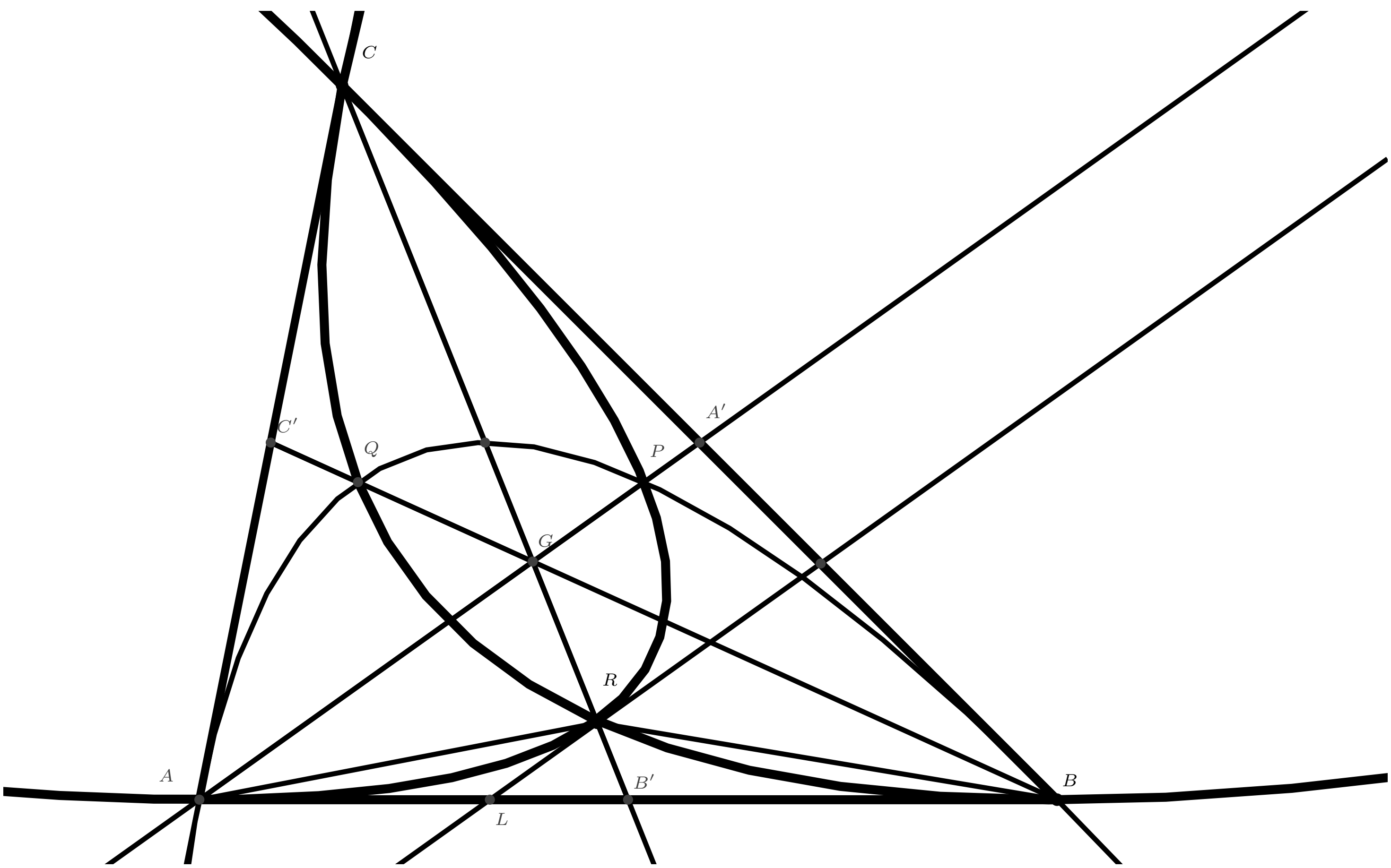
Archimède a démontré que l'aire du secteur parabolique de corde $[AB]$ est égale au tiers de l'aire du triangle ABC tel que $[AB]$ est la corde , $[AC]$ est tangent en A à la parabole et $[BC]$ est parallèle à l'axe de la parabole.



Calcul de l'aire de la surface délimité par le côté $[AB]$, les arcs paraboliques AR et RB .

Cette aire est égale à la différence de l'aire du triangle ARB et des aires des secteurs paraboliques délimités par les cordes $[AR]$ et $[RB]$

$ARB = \frac{1}{3}AGB = \frac{1}{3}\frac{1}{3}ABC = \frac{1}{9}ABC$



La parallèle à la droite (AA') passant par R coupe $[AB]$ en L.
Comme la droite (AA') est parallèle à l'axe de la parabole $\mathcal{P}(A;B;C)$ alors la droite (LR) est parallèle à l'axe de la parabole $\mathcal{P}(A;B;C)$ et (LB) est tangente en B à $\mathcal{P}(A;B;C)$.
D'après Archimède , l'aire du secteur parabolique de corde $[RB]$ est égale au tiers du triangle LRB.
$LRB = LRB' + B'RB$
(LR) // (AG) alors d'après le théorème de Thalès :
Comme $B'R = \dfrac{1}{3}B'G$, $B'L = \dfrac{1}{3}AB'$
on déduit $LRB' = \dfrac{1}{9} \times AGB'$
comme $AGB' = \dfrac{1}{2} \times AGB = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} \times ABC = \dfrac{1}{6} \times ABC$
donc $LRB' = \dfrac{1}{9} \times \dfrac{1}{6}ABC = \dfrac{1}{54}ABC$

Comme $LB' = \dfrac{1}{3}B'A = \dfrac{1}{3}B'B$ il en résulte que :
$RB'B = 3LRB' = 3 \times \dfrac{1}{54}ABC = \dfrac{3}{54}ABC$
donc $LRB = \dfrac{4}{54} = \times\dfrac{2}{27}ABC$
par conséquent l'aire du secteur parabolique de corde $[RB] = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{27}ABC = \dfrac{2}{81}ABC$

De même l'aire du secteur parabolique de corde $[AR]$ $\dfrac{2}{81}ABC$
• L'aire de la surface délimitée par le côté $[AB]$, les arcs paraboliques AR et RB est égale à :
$ARB - 2 \times \dfrac{2}{27} \times ABC$
$\dfrac{1}{9}ABC - 2 \times \dfrac{2}{81}ABC = \dfrac{5}{81}ABC$
L'aire de la surface délimitée par le côté $[AB]$, les arcs paraboliques AR et RB est égale à : $\dfrac{5}{81}ABC$
De même la surfaces délimitée par le côté $[AC]$ et les arcs de paraboles QA et QC a pour aire $\dfrac{5}{81}ABC$

ainsi que la surfaces délimitée par le côté $[BC]$ et les arcs de paraboles PB et PC a pour aire $\dfrac{5}{81}ABC$

Calcul de l'aire de la surface délimitée par les arcs paraboliques CQ , QP et PC.

L'aire du secteur parabolique délimité par la parabole $\mathcal{P}(C;A;B)$ et la corde $[AB]$ est égale à $\dfrac{2}{3}ABC$, il suffit de tracer la parallèle à (CB') passant par B , elle coupe (AC) en un point B_1
alors l'aire du secteur parabolique est égale au tiers de $ABB_1 = 2ABC$ donc $\dfrac{2}{3}ABC$

L'aire de la surface délimitée par les arcs paraboliques CP , PQ et QC est égale à :
$ABC - \dfrac{2}{3}ABC - 2 \times \dfrac{5}{81}ABC = \left(1 - \dfrac{54}{81} - \dfrac{10}{81}\right) ABC = \dfrac{17}{81}ABC.$

De même l'aire de la surface délimitée par les arcs paraboliques PB , BR et RP et celle délimitée par les arcs paraboliques RA , AQ et QR sont égales à : $\dfrac{17}{81}ABC$

Calcul de l'aire de la surface délimitée par les arcs paraboliques QP , PR et RQ

Elle est égale à :
$ABC - 3 \times \dfrac{17}{81}ABC - 3 \times \dfrac{5}{81}ABC = \dfrac{15}{81}ABC.$