544-1 Problème de dénombrement et takuzu.

On considère la suite v_n égale au nombre de lignes de longueur $2n$, où sont disposés n chiffres 0 et n chiffres 1, et où il ne peut y avoir plus de deux chiffres 0 (ou 1) consécutifs.

Cette solution utilise le site de l'OEIS Foundation (A177790), où sont énoncés (sans démonstration) les trois résultats suivants :

(1) La suite v_n vérifie la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} v_1 = 2, \quad v_2 = 6, \quad v_3 = 14, \quad v_4 = 34,& \\ v_{n+1} = 2\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}v_n + \frac{n^2-5}{(n-1)(n+3)}v_{n-1}& \\ + \frac{(n+1)(n-2)}{n(n+3)}v_{n-2} - \frac{(n+1)(n-3)}{(n-1)(n+3)}v_{n-3}.& \end{aligned}$$

(2) Soit m la partie entière de $\frac{n}{2}$; une expression de v_n est donnée par la formule suivante :

$$v_n = \sum_{i=0}^{m} \binom{n-i}{i} \left[2\binom{n-i}{i} + \binom{n-i-1}{i+1} + \binom{n-i+1}{i-1} \right].$$

(3) Lorsque n tend vers $+\infty$, un équivalent de v_n est le suivant :

$$v_n \sim \frac{(3+\sqrt{5})^n \sqrt{15+7\sqrt{5}}}{\sqrt{5\pi n}\; 2^{n-\frac{1}{2}}} \sim \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^n, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

On déduit de ces résultats :

1. Le nombre v_n de lignes valides est donné par **(2)**.
2. D'après **(3)**, on a

$$\frac{v_n}{2^{2n}} \sim \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{8} \right)^n ;$$

comme $\frac{3+\sqrt{5}}{8} \approx 0.6545$, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{2^{2n}} = 0.$$

3. Toujours d'après **(3)**, on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \sim \frac{3+\sqrt{5}}{2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}},$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

On a $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} < 1$, mais ce n'est pas suffisant pour montrer que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$; nous l'avons vérifié avec un programme pour $n \leq 10^{10}$, comme suit.

On utilise la relation de récurrence **(1)** pour calculer v_n ; elle est de la forme

$$v_{n+1} = a_n v_n + b_n v_{n-1} + c_n v_{n-2} - d_n v_{n-3}.$$

On en déduit une relation de récurrence vérifiée par $u_n = \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$; en effet, on a

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= a_n \frac{v_n}{v_n} + b_n \frac{v_{n-1}}{v_n} + c_n \frac{v_{n-2}}{v_n} - d_n \frac{v_{n-3}}{v_n} \\ &= a_n + b_n \frac{v_{n-1}}{v_n} + c_n \frac{v_{n-2}}{v_{n-1}} \frac{v_{n-1}}{v_n} - n \frac{v_{n-3}}{v_{n-2}} \frac{v_{n-2}}{v_{n-1}} \frac{v_{n-1}}{v_n},\end{aligned}$$

et donc

$$u_n = a_n + \frac{b_n}{u_{n-1}} + \frac{c_n}{u_{n-1}u_{n-2}} - \frac{d_n}{u_{n-1}u_{n-2}u_{n-3}},$$

et, avec une bonne précision, on obtient,

$$\begin{aligned}u_2 &= 2.333333333, \\ u_3 &= 2.428571429, \\ u_4 &= 2.437908497, \\ u_5 &= 2.461126005, \\ u_6 &= 2.478213508, \\ u_7 &= 2.490695971, \\ u_8 &= 2.501617742, \\ u_9 &= 2.510871680, \\ u_{10} &= 2.518758679, \\ u_{9960000000} &= 2.6180339886184674391694620088534701045, \\ u_{9970000000} &= 2.6180339886185992620470913955439764432, \\ u_{9980000000} &= 2.6180339886187308207506173940922221966, \\ u_{9990000000} &= 2.6180339886188621160733556300557370068, \\ u_{10000000000} &= 2.6180339886189931488054484664907502156,\end{aligned}$$

alors que

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2.6180339887498948482045868343656381177 > u_{10^{10}}.$$

Marie-Nicole Gras