544-2 Pour les amateurs de second degré.

On cherche un polynôme $x^2 + px + q$ (p et q réels) tel que $\max_{x \in [-1,1]} |x^2 + px + q|$ soit minimum.

Soit $P = x^2 - 0.5$; alors

$$P(-1) = P(1) = 0.5, \ P(0) = -0.5 \text{ et, pour tout } x \in [-1,1], \ |x^2 - 0.5| \leq 0.5\,;$$

on a donc $\max_{x \in [-1,1]} |x^2 - 0.5| = 0.5$.

Soit $Q = x^2 + px + q$; nous allons montrer que si $|Q(x)| \leq 0.5$ pour tout $x \in [-1,1]$, alors $Q = P$.

$$\text{Si } x = 0, \text{ on obtient} \qquad -0.5 \leq q \leq 0.5\,; \tag{1}$$

$$\text{si } x = 1, \text{ on obtient} \qquad -0.5 \leq 1 + p + q \leq 0.5\,; \tag{2}$$

$$\text{si } x = -1, \text{ on obtient} \qquad -0.5 \leq 1 - p + q \leq 0.5. \tag{3}$$

On déduit de (2) et (3) que

$$-1 \leq 2 + 2q \leq 1 \iff -1.5 \leq q \leq -0.5,$$

et il résulte de (1) que

$$q = -0.5.$$

Alors (2) et (3) s'écrivent respectivement

$$-0.5 \leq 1 + p - 0.5 \leq 0.5 \iff -1 \leq p \leq 0$$
$$-0.5 \leq 1 - p - 0.5 \leq 0.5 \iff -1 \leq -p \leq 0,$$

et donc

$$p = 0.$$

Il en résulte que si $Q \neq P$, $\max_{x \in [-1,1]} |Q(x)| > 0.5$, et donc le polynôme cherché est

$$P = x^2 - 0.5.$$

Marie-Nicole Gras