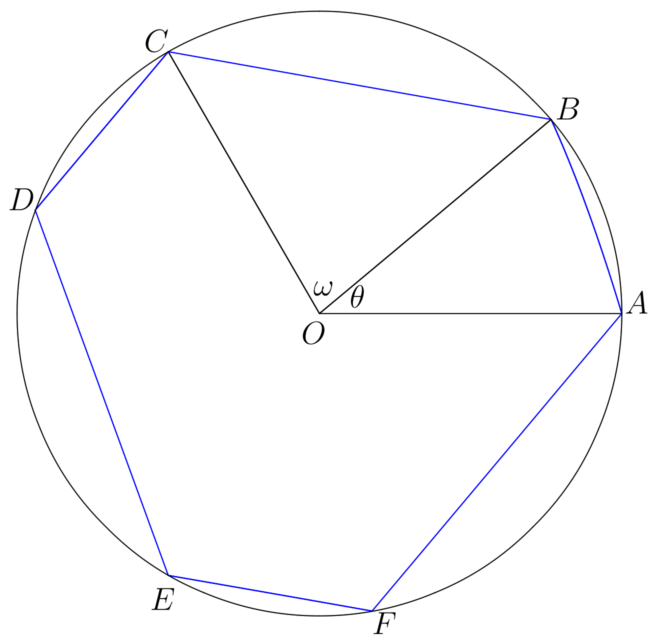
544-3 Un hexagone inscrit.

Par hypothèse, $\widehat{ABC}=120°$, $\widehat{BCD}=120°$, $\widehat{CDE}=120°$ et $\widehat{DEF}=120°$. On désigne par O le centre du cercle.



1. Puisque $\widehat{ABC}=120°$, on a $\widehat{AEC}=180°-120°=60°$ et

$$\widehat{AOC}=2\times 60°=120°.$$

De la même menière, on obtient

$$\widehat{BOD}=120°,\ \widehat{COE}=120° \text{ et } \widehat{DOF}=120°.$$

Par définition, le point A est fixe. On a $\widehat{AOC}=120°$ et $\widehat{COE}=120°$; donc les points C et E sont fixes, et le triangle ACE est equilatéral.

2. On pose $\theta=\widehat{AOB}$ et $\omega=\widehat{BOC}$.

– Puisque $\widehat{AOC}=120°$, on a $\theta+\omega=120°$;

– puisque $\widehat{BOD}=120°$, on a $\widehat{COD}=120°-\omega=\theta$;

– puisque $\widehat{COE}=120°$, on a $\widehat{DOE}=120°-\theta=\omega$;

– puisque $\widehat{DOF}=120°$, on a $\widehat{EOF}=120°-\omega=\theta$;

– on a $\widehat{EOA}=360°-\widehat{AOC}-\widehat{COE}=120°$, et donc $\widehat{FOA}=120°-\theta=\omega$.

On a donc montré que $\widehat{BOC}=\widehat{DOE}=\widehat{FOA}=\omega$. Les triangles OBC, ODE et OFA sont égaux ; donc $[FA]=[DE]=[BC]$.

3. On a montré que $\widehat{EOA}=120°$; donc $\widehat{ECA}=\frac{120°}{2}=60°$ et $\widehat{EFA}=180°-\widehat{ECA}=120°$. On a $\widehat{FOA}=\theta+\omega=120°$, et donc, de la même manière, $\widehat{FAB}=120°$.

Marie-Nicole Gras