ex 544-1

1.
Pierre Renfer a déjà donné une réponse dans l'exercice 535-1 et Marie-Nicole Gras a fait remarquer que la formule se trouve sur le site de l'OEIS Foundation au A177790.

2.
On va montrer qu'avec la condition 1 ça suffit

On fait un choix d'une ligne ayant autant de 0 que de 1. Il y en a $u_n = \binom{2n}{n}$ possibles.

On a $u_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \times (2n-n)!} = \frac{(2n)!}{n!^2}$

On va utiliser la formule de Striling

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\frac{u_n}{2^{2n}} \sim \frac{\dfrac{\sqrt{2\pi \times 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \times \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}}{2^{2n}} = \frac{\dfrac{\sqrt{2\pi} \times \sqrt{2} \times \sqrt{n}\left(\frac{1}{e}\right)^{2n} \times (2n)^{2n}}{\sqrt{2\pi} \times \sqrt{n}\left(\frac{1}{e}\right)^n \times n^n \times \sqrt{2\pi} \times \sqrt{n}\left(\frac{1}{e}\right)^n \times n^n}}{2^{2n}}$$

$$\frac{u_n}{2^{2n}} \sim \frac{\dfrac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{e}\right)^{2n} \times (2n)^{2n}}{\left(\frac{1}{e}\right)^n \times n^n \times \sqrt{2\pi} \times \sqrt{n}\left(\frac{1}{e}\right)^n \times n^n}}{2^{2n}} = \frac{\dfrac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{e}\right)^{2n} \times 2^{2n} \times n^{2n}}{\left(\frac{1}{e}\right)^{2n} \times n^{2n} \times \sqrt{2\pi} \times \sqrt{n}}}{2^{2n}} = \frac{\dfrac{\sqrt{2} \times 2^{2n}}{\sqrt{2\pi} \times \sqrt{n}}}{2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{2^{2n}} = 0$ et comme $v_n \leq u_n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{v_n}{2^{2n}} = 0$