Exercice 544-2

On va montrer que $\underset{x\in[-1;1]}{Max}\left|x^2+px+q\right|\geq 0{,}5$ quelques soient pet q et que l'égalité n'est obtenue que pour $p=0$ et $q=-0{,}5$

On note $f_{p,q}(x)=x^2+px+q$ et on va l'étudier sur $[-1;1]$.

On a $f_{p,q}'(x)=2x+p$ donc

x	**-1**		**-p/2**		**1**
signe de f'$_{p,q}$(x)		**-**	**0**	**+**	
Variations de f$_{p,q}$(x)	**1-p+q**	↘	**q-p²/4**	↗	**1+p+q**

On va regarder 3 cas:

-Premier cas $q>-0{,}5$

On a $1-p+q>0{,}5+p$ et $1+p+q>0{,}5+p$.

Si $p\geq 0$ alors $1+p+q>0{,}5+p>0{,}5$.

Si $p\leq 0$ alors $1-p+q>0{,}5-p>0{,}5$.

Donc $\underset{x\in[-1;1]}{Max}\left|x^2+px+q\right|>0{,}5$

-Deuxième cas $q<-0{,}5$

On a $q-\frac{p^2}{4}<-0{,}5-\frac{p^2}{4}<0$ donc $\left|q-\frac{p^2}{4}\right|>0{,}5+\frac{p^2}{4}>0{,}5$

et donc $\underset{x\in[-1;1]}{Max}\left|x^2+px+q\right|>0{,}5$

-Troisième cas $q=-0{,}5$

On a $1-p+q>0{,}5+p$ et $1+p+q>0{,}5+p$.

Si $p>0$ alors $1+p+q>0{,}5+p>0{,}5$.

Si $p<0$ alors $1-p+q>0{,}5-p>0{,}5$.

Donc $\underset{x\in[-1;1]}{Max}\left|x^2+px+q\right|>0{,}5$

Si $p=0$, alors $f_{0,-0{,}5}(x)=x^2-0{,}5=x^2-\frac{1}{2}$ et $f'_{0,-0{,}5}(x)=2x$.

On a $p=0$ alors $1+p+q=1-p+q=0{,}5$ et $q-\frac{p^2}{4}=-0{,}5-\frac{0^2}{4}=-0{,}5$.

Donc

x	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
signe de $f'_{0,-0.5}(x)$			-		0		+		
Variations de $f_{0,-0.5}(x)$	0,5	↘			-0,5		↗		0,5
Variations de $\lvert f_{0,-0.5}(x)\rvert$	0,5	↘	0	↗	0,5	↘	0	↗	0,5

et $\underset{x\in[-1;1]}{Max}\left|f_{0,-0,5}(x)\right| = 0{,}5$

Conclusion $\underset{p,q}{Min}\left(\underset{x\in[-1;1]}{Max}\left|x^2 + px + q\right|\right) = 0{,}5$