Exercice 544-3

1.

Dans un repère orthonormé direct on appelle Γ le cercle trigonométrique. On place A fixe en (1;0) et $B(a;b)$ mobile sur le cercle avec $b \geq 0$.

On a $AB^2 = (a-1)^2 + b^2 < 3$. Or $B \in \Gamma$ donc $a^2 + b^2 = 1$

Ainsi il vient $(a-1)^2 + 1 - a^2 = a^2 - 2a + 1 + 1 - a^2 = 2 - 2a < 3$ d'où $a > -\frac{1}{2}$.

Dans le triangle ABC on utilise le théorème des sinus

$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = 2R$ où R est le rayon du cercle circonscrit. Mais le cercle circonscrit à ABC est Γ. donc $AC = 2R \sin B = 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Ainsi C est fixe et $C\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ou $C\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Soit (D) la droite perpendiculaire à (AB) passant par B,(D) passe par $A'(-1;0)$ puisque AA'B est rectangle en B. Puisque 120>90 C est au dessus de (D) donc $C\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et B est sur l'arc AC et le sens direct est le sens trigonométrique.

Pour les mêmes raisons CE=1 et $E\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2.

Dans la rotation de centre O et d'angle 120°, Γ est invariant et on a

$A \to C$

$C \to E$

$E \to A$

$B \to B'$

$B' \to B''$

$ABC \to CB'E$

$CB'E \to EB''A$

Les triangles ABC et CB'E sont isométriques donc

$B\hat{A}C + B\hat{C}A = 60°$ et $E\hat{C}B' = B\hat{A}C$ donc

$B\hat{C}B' = B\hat{C}A + A\hat{C}E + E\hat{C}B' = B\hat{C}A + A\hat{C}E + B\hat{A}C = B\hat{A}C + B\hat{C}A + A\hat{C}E = 60 + 60 = 120$

Donc D=B' et pour les mêmes raisons B''=F

Donc la rotation de centre O et d'angle 120°,

$ABC \to CDE$

$CDE \to EFA$

$EFA \to ABC$

Ces triangles étant isométriques , donc FA=DE=BC

3.

Ces triangles étant isométriques, $E\hat{F}A = A\hat{B}C = 120°$ et comme ABCDEF est un hexagone

$F\hat{A}B = 720 - 5 \times 120 = 720 - 600 = 120°$ et tous les angles de l'hexagone sont de 120°

Dans la rotation de centre O et d'angle 120°,

$B \to D$

$D \to F$

$F \to B$