

544-2 Pour les amateurs de second degré

Dans un repère orthonormé, le graphe du polynôme f du second degré de l'énoncé est une parabole image par une translation de la parabole standard, d'équation $y = x^2$.

On va étudier les images J des intervalles I de longueur 2 par la fonction $x \mapsto x^2$.

La translation amenant I sur $[-1, 1]$ et le milieu de J sur 0 permet le retour à l'énoncé.

Il s'agit de trouver $I = [a, a + 2]$ pour que la longueur k de J soit minimale.

Le maximum demandé par l'énoncé sera alors $k = \frac{1}{2}$

Par symétrie par rapport à l'axe des y , on peut se restreindre au cas où $a \geq -1$

- Si $a \geq 0$, alors $k = (a + 2)^2 - a^2 = 4 \cdot (a + 1) \geq 4$
- Si $-1 \leq a < 0$, alors $k = (a + 2)^2 \geq 1$

On obtient la valeur minimale de k pour $a = -1$

La translation donne alors la solution : $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}$

Cette solution correspond à : $p = 0$ et $q = -\frac{1}{2}$