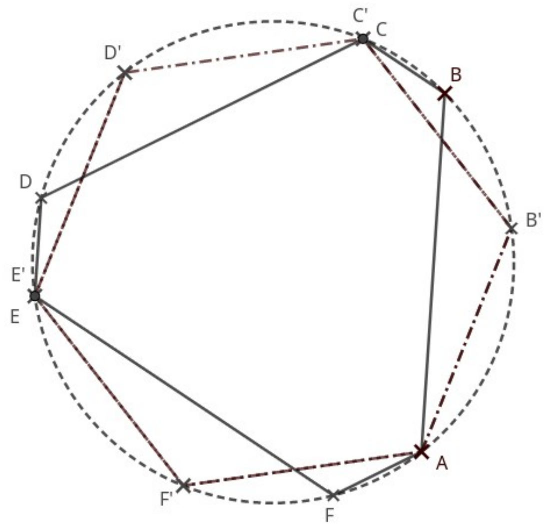
Solution proposée par Pierre-Alain SALLARD

À partir du même point A fixé par l'énoncé, construisons l'hexagone régulier AB'C'D'E'F' (en prenant le même sens de rotation que celui adopté pour la construction de l'hexagone ABCDEF).



Notons en préambule que l'hexagone régulier AB'C'D'E'F' a des côtés de longueur 1 (le rayon du cercle inscrit) et la distance AC' est égale à $\sqrt{3}$ (résultat classique). La condition de l'énoncé, à savoir que le point variable B doit vérifier AB < $\sqrt{3}$ assure alors que B est situé sur le petit arc de cercle $\overline{AC'}$ [1].

Démontrons la propriété P_1 suivante : « les points C et C' d'une part, E et E' d'autre part sont confondus ».

Preuve de la propriété P_1.

La preuve de ce lemme repose sur le théorème de l'angle inscrit (voir wikipedia), plus précisément sur son corollaire : « deux angles inscrits dans un cercle et interceptant le même arc sont de même mesure ». Ainsi, l'angle $\widehat{AB'C'}$ intérieur de l'hexagone régulier et l'angle $\widehat{ABC'}$ sont de même mesure puisqu'ils interceptent le même arc $\overline{AC'}$. Il vient donc que l'angle $\widehat{ABC'}$ mesure 120°. Or le point C de l'énoncé est construit comme étant le point du cercle tel que $\widehat{ABC}=120°$: les points C et C' sont donc confondus.

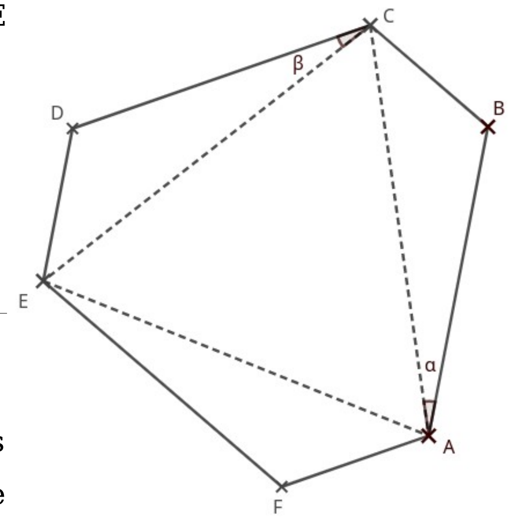
On reprend le même raisonnement pour montrer que E et E' sont confondus (en remplaçant A,B et C par C ,D et E). CQFD.

1 On adopte ici la convention que la notation $\overline{AB}$ désigne l'arc de cercle allant de A à B.

Les points 1 et 3 sont alors des conséquences directes de la propriété P_1 :

- les points C et E sont fixes, puisqu'ils correspondent aux points C' et E' de l'unique hexagone régulier construit à partir de A.
- l'angle en F de l'hexagone ABCDEF vaut 120° puisqu'il intercepte le même arc $\overline{AE}$ que l'angle en F' de l'hexagone régulier AB'CD'EF'.
- Enfin, les quatre premiers angles en B, C, D et E de l'hexagone ABCDEF valent 120° d'après l'énoncé, de même que le cinquième angle en F (point ci-dessus) : puisque la somme des angles intérieurs de l'hexagone ABCDEF vaut 720°, on déduit que le dernier angle en A mesure 720 – 5× 120 = 120° également.

Démontrons enfin la propriété P_2 : « les triangles ABC et CDE sont isométriques ».



Preuve de la propriété P_2 .

Il suffit de montrer que :

1°) la longueur AC est égale à la longueur CE, ce qui est acquis puisque ACE est un triangle équilatéral (sommets du polygone régulier AB'CD'EF') ;

2°) et qu'ils ont deux mesures d'angles égales (la troisième sera alors automatiquement acquise). Or par construction, les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CDE}$ sont égaux (de mesure 120°), ce qui fournit une première égalité. Puis on a d'une part, dans le triangle ABC, $\widehat{CAB}+\widehat{BCA}=180-120=60°$; et d'autre part la décomposition $\widehat{BCD}=\widehat{BCA}+\widehat{ACE}+\widehat{ECD}$ donne $\widehat{BCA}+\widehat{ECD}=120°-60°=60°$ (puisque l'angle en C mesure 120° et que le triangle ACE est équilatéral). On déduit alors la deuxième égalité de mesure d'angles $\widehat{CAB}=\widehat{ECD}$.

CQFD.

Le point 2 est alors une conséquence immédiate de cette propriété P_2 : puisque les triangles ABC et CDE sont isométriques, les longueurs BE et DE sont égales. On applique un raisonnement identique pour obtenir l'égalité des longueurs DE et FA.