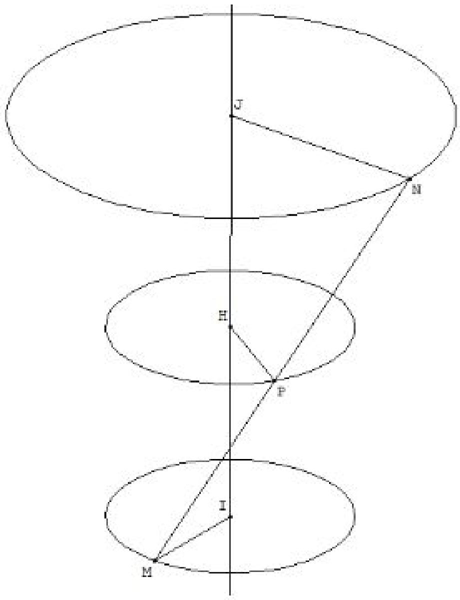
Problème 545-1



Soit $r = \frac{d}{2}$ et $R = \frac{D}{2}$

Soit un repère orthonormé dont l'axe vertical est celui de la tour et le plan horizontal celui de la base.

Une poutre joint $M(r;0;0)$ au point $N(0;R;h)$

et a pour vecteur directeur : $\overrightarrow{MN}(-r;R;h)$

Un point P de côte z de cette poutre a pour coordonnées :

$x = r - rt$; $y = Rt$; $z = ht$

où t varie de 0 à 1

Le volume cherché est donné par l'intégrale :

$\int_0^h a(z)\,dz$ où $a(z)$ est l'aire du cercle qui passe par P de même axe que la tour.

Cette aire est donnée par $\pi(x^2+y^2) = \pi[r^2(1-t)^2+R^2t^2]$

d'où le volume : $\pi\int_0^1 [r^2(1-t)^2+R^2t^2]h\,dt = \frac{\pi h}{3}(r^2+R^2)$ ou $\frac{\pi h}{12}(d^2+D^2)$

On peut se dispenser de calculer l'intégrale en utilisant la formule des trois niveaux.

$$\frac{h}{6}\left[\pi r^2+4\pi\left(\frac{r^2}{4}+\frac{R^2}{4}\right)+\pi R^2\right] = \frac{\pi h}{6}\left[\frac{d^2}{4}+\left(\frac{d^2}{4}+\frac{D^2}{4}\right)+\frac{D^2}{4}\right] = \frac{\pi h}{12}(d^2+D^2)$$