Problème 545-4

Représentation paramétrique de l'ellipse : $x=a\cos\theta$; $y=b\sin\theta$

Si on considère que le rectangle a le même centre que l'ellipse dans laquelle il est inscrit et que ses côtés sont parallèles aux axes de cette ellipse la proposition est fausse.

Les dimensions d'un tel rectangle sont $2a\cos\theta > 0$ et $2b\sin\theta > 0$

L'aire de ce rectangle $4ab\sin\theta\cos\theta = 2ab\sin 2\theta$ a pour maximum $2ab$ pour $\theta = \frac{\pi}{4}$

Dans le cas où l'ellipse est un cercle de rayon r elle a pour maximum $2r^2$

Si l'ellipse et le cercle ont la même aire $\pi ab = \pi r^2$ on aura $2ab = 2r^2$

Parallélogramme et rectangle inscrits dans une ellipse.

Soit $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < 2\pi$ les angles paramètres permettant de définir quatre points de l'ellipse :

$M_1(a\cos\theta_1 ; b\sin\theta_1)$ $M_2(a\cos\theta_2 ; b\sin\theta_2)$ $M_3(a\cos\theta_3 ; b\sin\theta_3)$ $M_4(a\cos\theta_4 ; b\sin\theta_4)$

puis quatre points du cercle principal :

$P_1(a\cos\theta_1 ; a\sin\theta_1)$ $P_2(a\cos\theta_2 ; a\sin\theta_2)$ $P_3(a\cos\theta_3 ; a\sin\theta_3)$ $P_4(a\cos\theta_4 ; a\sin\theta_4)$

Pour un parallélogramme $M_1M_2M_3M_4$ il faut et il suffit que $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ aient même milieu :

$a\cos\theta_1 + a\cos\theta_3 = a\cos\theta_2 + a\cos\theta_4$ et $b\sin\theta_1 + b\sin\theta_3 = b\sin\theta_2 + b\sin\theta_4$

a et b ne sont pas nuls, donc les solutions de ce système n'en dépendent pas et on peut aussi bien écrire :

$a\cos\theta_1 + a\cos\theta_3 = a\cos\theta_2 + a\cos\theta_4$ et $a\sin\theta_1 + a\sin\theta_3 = a\sin\theta_2 + a\sin\theta_4$ donc que $P_1P_2P_3P_4$ doit être un parallélogramme inscrit dans le cercle principal et donc un rectangle puisque ses angles opposés sont égaux et supplémentaires en même temps.

On en déduit : $\theta_3 - \theta_1 = \theta_4 - \theta_2 = \pi$ et

$M_1(a\cos\theta_1 ; b\sin\theta_1)$ $M_2(a\cos\theta_2 ; b\sin\theta_2)$ $M_3(-a\cos\theta_1 ; -b\sin\theta_1)$ $M_4(-a\cos\theta_2 ; -b\sin\theta_2)$

Pour que $M_1M_2M_3M_4$ soit un rectangle il faut et il suffit que : $M_3M_1 = M_4M_2$

$a^2\cos^2\theta_1 + b^2\sin^2\theta_1 = a^2\cos^2\theta_2 + b^2\sin^2\theta_2$ ou $(a^2-b^2)\cos^2\theta_1 + b^2 = (a^2-b^2)\cos^2\theta_2 + b^2$

Les conditions sur les angles font que $\cos^2\theta_1 = \cos^2\theta_2$ donne $\theta_2 = \pi - \theta_1$

On en conclue que les côtés du rectangle sont nécessairement parallèles aux axes de l'ellipse.